UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

581

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

CINQUIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LÉVY, A. MANNHEIM, É. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME DIXIÈME. — ANNÉE 1904.

70256
13/6/06

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

(Tous droits réservés.)

QA
1
J684
Sér. 5
t. 10

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

§ I. — Constatation d'un régime, en dehors des époques de pluie, dans les sources drainant les nappes d'eau d'infiltration et, par suite, dans les nappes elles-mêmes : recherche théorique de ce régime; résultats obtenus.

1. L'observation régulière, qui se fait depuis plusieurs années, de l'état des sources alimentant d'eau potable nos grandes villes, commence à montrer que chacune de ces sources a ses débits successifs, durant la saison d'été où ne se renouvelle pas sensiblement par l'atmosphère la nappe des eaux d'infiltration qu'elle draine [1], représentés

[1] L'ingénieur Dausse a remarqué judicieusement, il y a plus de soixante ans, que les pluies d'été ne profitent guère aux sources des terrains perméables; car

à peu près par une *seule* courbe plane, où les temps figurent comme abscisses et les débits correspondants comme ordonnées. La différence existant, aux jours datés de même (au millésime près), entre les saisons estivales des diverses années, ne se manifesterait guère que par un déplacement, propre à chaque été, de l'origine des abscisses, déplacement dû à la disparité des pluies antérieures, quant à leur volume total et à sa distribution soit dans le temps, soit sur les diverses parties du bassin d'alimentation de la source. Ainsi, dès que l'observation effective, au commencement d'un été quelconque, ferait connaître le débit pour ce moment et, par suite, l'ordonnée spéciale dont le pied devrait être choisi comme origine des abscisses pour l'été en question, la courbe des débits fournie par l'observation des étés passés permettrait d'annoncer les débits suivants, savoir, tous ceux qui se produiraient aux divers jours de la saison débutante ([1]).

Ce fait tend à prouver que l'état de la source et, par suite, celui même de la nappe qui y débouche, ne tardent pas, une fois la période des pluies terminée, à *se régler* d'après la configuration du lit imperméable supportant la nappe aqueuse, la contexture du terrain perméable qu'elle pénètre et, enfin, d'après *son volume actuel total,* mais indépendamment des particularités de temps ou de lieu offertes par l'accession, à la nappe, des diverses parties de ce volume. Ainsi, comme dans tant d'autres phénomènes physiques, *lorsque leurs conditions sont devenues constantes,* et, spécialement, dans tous ceux qu'offrent les cours d'eau visibles, un *régime* tend à s'établir, et se

---

l'eau qui s'y trouve momentanément absorbée par le sol est, presque toujours, évaporée à peu près entièrement, avant d'avoir atteint la nappe aqueuse sous-jacente. Voir son Mémoire *De la pluie et de l'influence des forêts sur les cours d'eau,* au numéro de mars et avril 1842 des *Annales des Ponts et Chaussées,* p. 198 à 201.

([1]) Cette idée d'une *courbe unique* des débits, pour chaque source drainant un sol perméable et considérée un certain temps après la dernière chute de pluie ayant fourni un apport à sa nappe d'alimentation, vient d'être énoncée, comme loi expérimentale, par M. Edmond Maillet, ingénieur des Ponts et Chaussées et lauréat de l'Institut. Elle était déjà en germe dans sa Note, du 12 mai 1902, *Sur la prévision des débits minima des sources de la Vanne* (*Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris,* t. CXXXIV, p 1103).

réalise *assez vite,* où les circonstances initiales du phénomène ne figurent plus, si l'on considère seulement l'état *final*, qui serait, ici, le *tarissement* de la source, mais où elles figurent uniquement par un certain effet général ou d'ensemble, exprimé au moyen d'un *seul* paramètre, si l'on considère l'*état pénultième,* signalé par Fourier dans le refroidissement des corps et qui annonce, en la précédant de très loin, la cessation finale du phénomène. Ici, où l'écoulement se réglera en général, comme nous verrons, par la hauteur et par les *pentes* de la surface supérieure, *libre* quoique souterraine, de la nappe aqueuse, cette surface sera donc, *une fois le régime sensiblement établi,* entièrement déterminée pour chaque valeur de l'espace total qu'elle délimitera au-dessus du lit imperméable, c'est-à-dire, dès lors, par une quelconque de ses ordonnnées verticales h, celle qui correspondra à un point (x, y), choisi à volonté, du plan horizontal de repère tracé dans le terrain perméable où s'abaisse lentement cette surface libre.

2. J'établirai au paragraphe suivant, d'après les lois élémentaires de la filtration, bien connues, l'*équation indéfinie,* aux dérivées partielles, et les *relations définies,* se rapportant au contour de la nappe, qui régissent cet abaissement de la surface libre, quand les pentes tant *de fond* que *de superficie* ont de *petites* valeurs. Si l'équation indéfinie dont il s'agit était linéaire, on pourrait espérer obtenir tout au moins la forme générale de son intégrale et, par suite, y débrouiller l'expression asymptotique des ordonnées ou *altitudes* h de la nappe, expression qui représenterait la figure de régime cherchée.

Mais cette équation aux dérivées partielles ne devient linéaire que dans l'hypothèse *d'eaux très basses,* c'est-à-dire d'une dénivellation de la nappe, entre son point le plus haut et la source, très petite comparativement à ses épaisseurs ou profondeurs totales; et, alors, le faible écoulement de liquide qui y subsiste vers la source est exactement pareil à l'écoulement de la chaleur dans une certaine plaque à faces imperméables, limitée au contour même de la nappe, rendu également imperméable, sauf à l'endroit où est la source et où l'on maintiendrait température nulle [1]. Or tous les caractères observés du

---

[1] En conséquence, cet écoulement se prolongerait, pour ainsi dire, sans fin,

débit des sources se montrent bien, avec leur maximum de simplicité, dans ce cas extrême, auquel se trouve ainsi réduite la théorie à moins de faire des hypothèses particulières sur la configuration ou plane, ou courbe (et concave ou convexe), du sous-sol imperméable supportant la nappe aqueuse.

Les débits de la source y sont proportionnels à une simple exponentielle, $e^{-\alpha t}$, où figure un *coefficient de tarissement*, α, fonction seulement de la configuration du fond et de deux constantes physiques, exprimant la perméabilité des terrains qui filtrent la nappe. De plus, les petites altitudes h de la surface libre au-dessus du plan horizontal du seuil de la source, mesurées sur les diverses verticales fixes du terrain, que définissent les deux coordonnées horizontales x, y, y sont les produits d'une fonction déterminée de x et de y, par une fonction du temps t proportionnelle à la même exponentielle $e^{-\alpha t}$. Il y a donc *conservation*, jusqu'à tarissement, du mode d'écoulement établi, en ce sens que toutes les ordonnées h de la surface libre gardent sans cesse leurs rapports mutuels, maintenant dès lors mêmes pentes *relatives* aux divers éléments de la superficie et aussi, par suite, mêmes vitesses relatives de filtration aux régions de la nappe sous-jacentes.

3. L'observation du débit des sources porte à penser que, pour des dénivellations h considérables, très supérieures à celles dont il vient d'être question, et *initialement* arbitraires, l'écoulement se réglerait plus ou moins vite d'une certaine manière, la fonction h tendant à y devenir presque indépendante des données initiales ou, une infinité d'intégrales particulières, à se *confondre* en une seule. Mais la forme de l'équation indéfinie du mouvement montre que ce *régime*, si la réunion ou *convergence* des intégrales s'opère réellement, ne consiste pas, du moins d'une manière générale, en un mode d'écoulement se *conservant*, où toutes les ordonnées h s'abaisseraient sans altération

---

si une lente évaporation, que la théorie néglige, à la surface libre souterraine, n'abaissait pas à la longue le niveau jusqu'au-dessous du seuil de la source (à moins d'être compensée, de temps à autre, par un faible apport d'eaux pluviales).

de leurs rapports mutuels : en d'autres termes, *ces ordonnées n'y sont qu'exceptionnellement le produit d'une fonction des coordonnées par une fonction du temps.*

Le cas le plus simple où elles le soient, et où, par conséquent, le régime consiste en un mode d'écoulement qui se conserve, est celui d'une nappe aqueuse reposant sur un lit horizontal, avec rebord vertical tout autour, sauf à l'endroit de la source, où ce rebord est supposé manquer complètement. Alors la nappe se trouve toute en hauteur au-dessus du plan horizontal de repère; et les ordonnées h de la superficie, qui mesurent justement cette hauteur sur chaque verticale fixe (x,y), sont en raison inverse des temps, $\tau = \tau_0 + t$, comptés à partir de l'origine la plus ancienne possible, antérieure, d'une quantité τ_0 plus ou moins grande suivant les cas, à l'instant où le régime est censé avoir été atteint et d'où partent les valeurs, t, de la durée écoulée jusqu'aux divers moments du phénomène. Ce régime est très stable; car, si l'on suppose que l'état initial donné en différât peu, les petits écarts existant entre le mode effectif d'écoulement et lui sont régis, aux instants successifs, par une équation, aux dérivées partielles, linéaire, qui, dans le cas, par exemple, d'une nappe cylindrique à génératrices horizontales et d'un terrain homogène, les fait évanouir comme l'inverse de la *quinzième* puissance du temps τ. L'intégration de cette équation linéaire à coefficients variables, sous les conditions au contour existantes, offre de l'intérêt, à raison de la manière originale et presque intuitive dont s'y forment les *solutions simples.*

Quant aux débits de la source, ils y sont inversement proportionnels aux carrés des temps τ.

4. Le cas précédent, d'un fond plat horizontal, peut être censé réalisé, dans un lit quelconque, lorsque la nappe aqueuse est donnée initialement assez haute pour que, même une fois le régime à peu près établi, ses pentes de superficie soient encore beaucoup plus fortes que ses pentes de fond, au point de rendre celles-ci comparativement négligeables. Il exprimerait donc les *premières phases* de l'écoulement *réglé* de toute nappe à pentes de fond modérées, relativement très haute.

Mais un autre cas, où le lit est soit *concave*, soit même *convexe*, se trouve admettre aussi un mode d'écoulement *se conservant;* et ce mode doit pouvoir, par suite, représenter *approximativement* l'écoulement effectif, une fois réglé, des nappes réelles dont les profondeurs H (positives ou négatives), sous le plan horizontal du seuil d'une source, croissent graduellement en valeur absolue quand on s'éloigne de ce seuil. C'est celui d'un lit où ces ordonnées fixes H, qui se comptent positivement de haut en bas, sont, au moins dans les circonstances les plus simples, proportionnelles aux précédentes ordonnées réglées h de la superficie, qui se comptent de bas en haut. Alors celles-ci, h, gardent entre elles mêmes rapports mutuels de régime que dans le cas d'un fond plat; et elles varient comme la fonction du temps $\frac{k e^{-k\tau}}{1 - e^{-k\tau}}$, où k est un coefficient mesurant le degré de concavité du fond.

Le débit de la source se trouve, en même temps, proportionnel à l'expression $\left(\frac{k}{1 - e^{-k\tau}}\right)^2 e^{-k\tau}$, qu'on peut écrire aussi $\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\frac{k\tau}{2}}{\operatorname{sih}\frac{k\tau}{2}}\right)^2$. C'est donc par celle-ci qu'il faudrait essayer de représenter, à un facteur constant près, le débit, pendant l'été, des sources à bassin d'alimentation le plus simple possible au point de vue des lois de l'écoulement. On verra, du reste, au n° **11**, que, pour la plupart des *très fortes sources,* comme sont généralement celles dont on amène l'eau dans les villes, l'expression du débit doit être plus simple encore, et se réduire sensiblement à la forme exponentielle $A e^{-\alpha t}$, que la précédente donne, il est vrai, mais seulement pour les valeurs assez grandes de τ.

La stabilité du régime, à en juger par la rapidité avec laquelle tendent vers l'intégrale qui l'exprime les intégrales particulières voisines, est très grande dans le cas d'un lit concave; car les petits écarts qui les en séparent, régis par une équation aux dérivées partielles linéaire, s'évanouissent, pour τ grandissant, comme la *douzième* puissance de l'exponentielle $e^{-k\tau}$, du moins dans une nappe cylindrique filtrée par un terrain homogène. La stabilité existe encore, notable même, mais sans être, à beaucoup près, aussi accusée, dans le cas d'un lit convexe.

L'intégration de cette équation linéaire se fait au moyen de solutions simples qui sont des polynomes par rapport à une certaine variable remplaçant l'abscisse, avec coefficients fonctions du temps rationnelles en $e^{-k\tau}$.

C'est le seul exemple que je connaisse, en Physique mathématique, de solutions simples, faciles à obtenir, non réductibles au produit d'une fonction du temps par une fonction des coordonnées. Et le procédé qui les fournit n'est pas moins original, car je n'en connais, également, pas d'autre exemple.

§ II. — Équations du mouvement, pour une nappe aqueuse filtrée dans le sol et n'ayant que de faibles pentes tant de fond que de superficie.

5. Lorsqu'un sol perméable, reposant sur un sous-sol imperméable, a ses couches inférieures imprégnées d'eau, mais ses couches supérieures soumises à la pression atmosphérique constante de l'air superposé à l'eau, et que, d'ailleurs, celle-ci, occupant les interstices des grains sablonneux ou terreux des couches inférieures, c'est-à-dire une certaine fraction μ de leur volume apparent donnée pour chaque endroit (x, y, z), se trouve animée, dans toute région un peu étendue, de lents mouvements *suivant une certaine direction générale* susceptible de changer peu à peu avec le temps t, les interstices contigus assez bien alignés, suivant cette direction générale, pour permettre un écoulement appréciable, deviennent des *tubes de transpiration*. Quant à l'eau emmagasinée entre deux tubes de transpiration voisins, dans les interstices dont les ouvertures sont disposées suivant les directions perpendiculaires, et qui, à peu près immobile, complète en quelque sorte la paroi des tubes, elle a, dans le mouvement, le rôle capital de transmettre la pression d'un tube à l'autre, et, par suite, de rendre solidaire dans tous l'écoulement.

Or on sait que, le long des chemins *perpendiculaires* à cet écoulement, la pression est régie par la loi hydrostatique, non seulement là où le liquide est ainsi en repos entre deux tubes, mais, même, à la traversée des filets fluides de chaque tube. Abstraction faite d'anomalies locales se neutralisant en moyenne, cette pression p (que nous

supposerons évaluée en hauteur de liquide) varie donc hydrostatiquement le long de tels chemins, dans toute l'étendue du liquide filtré par le sol. C'est dire que la *hauteur* φ *de charge*, somme, en chaque point (x, y, z), de p et de l'altitude $\mathfrak{z}$ du point au-dessus d'un plan horizontal fixe de *repère*, y est constante. Donc *l'écoulement général se fait, partout, normalement à la famille de surfaces qui a pour équation* $\varphi = \text{const.}$ [1].

6. Dès lors, les deux premières lois de Hagen-Poiseuille donnent, comme on sait, pour le volume liquide débité dans l'unité de temps par l'unité d'aire de ces surfaces, en sens inverse de leur normale dN tirée en allant vers les charges φ croissantes, le produit, $K\frac{d\varphi}{dN}$, d'un certain coefficient spécifique K, d'autant plus petit que la couche perméable est plus compacte, par le paramètre différentiel du premier ordre $\Delta_1\varphi$ ou $\frac{d\varphi}{dN}$ de la charge φ. Par suite, à travers l'unité d'aire d'un élément plan de direction quelconque, dont la normale dn fait un angle donné γ avec dN, unité d'aire coupant les filets fluides qui traversent sa projection $\cos\gamma$ sur une surface contiguë $\varphi = \text{const.}$, le flux F de transpiration sera fourni par ces filets interceptés et aura la valeur $K\frac{d\varphi}{dN}\cos\gamma$.

Faisons-y figurer, au lieu de l'espacement normal dN de deux surfaces voisines d'égale charge, son expression, $dn\cos\gamma$, en fonction de leur espacement, dn, estimé suivant la normale même à l'élément plan; et la formule générale des flux de transpiration, spécifiée ensuite pour les trois éléments *principaux* (ou perpendiculaires respectivement aux x, y, z), sera

$$(1)\qquad F = K\frac{d\varphi}{dn}, \qquad F_x = K\frac{d\varphi}{dx}, \qquad F_y = K\frac{d\varphi}{dy}, \qquad F_z = K\frac{d\varphi}{dz}.$$

---

[1] *Voir*, pour plus de développement de ces considérations et de celles qui suivent jusqu'aux formules fondamentales (1) des phénomènes de transpiration, la vingtième de mes Leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière* (t. I, p. 323 à 328).

7. Cela posé, n'attribuons que de *petites pentes* tant au sous-sol imperméable qu'à la surface supérieure, libre, de la nappe d'eau infiltrée dans le sol perméable, nappe d'une épaisseur généralement faible, comparativement à ses dimensions horizontales. Comme, par suite de cette faible épaisseur, le courant aura une direction à peu près commune, sur chaque verticale, depuis le fond jusqu'à la surface, les filets seront, partout, presque horizontaux comme ceux qui glissent sur le sous-sol; et les surfaces d'égale charge φ, auxquelles ils sont normaux, se confondront sensiblement avec des cylindres à génératrices verticales. La charge φ, en (x, y, z) et à l'époque t, différera donc très peu de ce qu'elle est, en même temps, au point *mouillé le plus haut* de la verticale menée par (x, y, z). Or, en ce point mouillé le plus haut, où p s'annule (abstraction faite de la pression atmosphérique constante), φ se réduit à l'altitude z. Nous y appellerons celle-ci h; et ce sera l'ordonnée z de la surface libre; car nous prendrons pour plan des xy le plan horizontal de repère.

Nous supposerons, d'ailleurs, homogène sur chaque verticale le sol perméable; de sorte que les deux coefficients spécifiques μ, K seront des fonctions (données) de x et de y seulement, ainsi que la profondeur H de la nappe au-dessous du plan fixe de repère (comptée positivement de haut en bas, négativement de bas en haut).

Découpons par la pensée, dans le sol perméable, un filet prismatique vertical, de section droite, rectangulaire, $d\sigma = dx\,dy$ sur le plan des xy: à l'époque t, sa longueur *mouillée* sera $H + h$; et il contiendra le volume liquide $\mu(H + h)\,d\sigma$. L'accroissement, $\mu\frac{dh}{dt}\,d\sigma\,dt$, de ce dernier, durant l'instant dt, proviendra de l'excédent des flux entrés par deux de ses faces latérales sur les flux sortis par les deux autres, s'il n'y a eu durant l'instant dt, à la surface supérieure, ni affluence d'eau de pluie ou condensation de vapeurs, ni évaporation appréciable (vu la difficulté d'accès de l'air sec extérieur).

Or observons que les deux faces $(H + h)dy$, $(H + h)dx$, contiguës à la première arête, (x, y), du filet prismatique, laissent sortir les flux $F_x(H + h)dy\,dt$, $F_y(H + h)dx\,dt$, où F_x, F_y peuvent être remplacés par leurs valeurs (1), avec $\varphi = h$; et que les deux faces

opposées laissent entrer des flux de même forme, mais accrus, respectivement, de leurs différentielles en x et en y.

Il viendra donc, pour régir l'ordonnée h de la surface libre souterraine, fonction de x, y et t donnée *initialement* (ou pour $t = 0$), l'équation *indéfinie* du problème

$$(2) \qquad \mu \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dx}\left[K(H+h)\frac{dh}{dx}\right] + \frac{d}{dy}\left[K(H+h)\frac{dh}{dy}\right].$$

8. Il faut y joindre une condition *définie*, spéciale à chaque élément du contour de la projection σ de la nappe liquide sur le plan des xy.

Une partie, χ, de ce contour, sera dite *contour libre*. Nous admettrons que le sol perméable y ait été enlevé totalement et, le lit imperméable de la nappe, coupé ou arasé *à un niveau uniforme*, plus bas que la surface libre intérieure, de manière à constituer le *seuil d'écoulement* de la *source* dont on étudie les débits successifs : nous choisirons justement le plan horizontal de ce seuil pour plan des xy ou de repère. En raison de la facilité qu'y trouve l'écoulement par rapport à sa lenteur dans la couche perméable, un instant suffira pour y rendre insensibles, comparativement aux dénivellations h, non seulement l'épaisseur de la lame d'eau débitée, mais, même, les hauteurs h dans tout le voisinage, jusqu'aux points de la nappe souterraine où deviennent modérées ses pentes tant de fond que de superficie et où, par suite, s'applique l'équation (2), établie dans l'hypothèse de vitesses presque horizontales. La condition spéciale au contour libre sera donc, à très peu près, $h = 0$.

Nous appellerons χ_1 le reste du contour, où nous admettrons, pour fixer les idées, que le lit imperméable se relève brusquement et verticalement, assez pour rendre invariable, en projection sur le plan des xy, cette partie χ_1 ou *contour-paroi*, quelles qu'y soient les valeurs variables de h. Le fluide y circulant parallèlement au bord, le flux par unité d'aire, à travers tout élément plan vertical parallèle à χ_1, sera insensible, même si l'on prend cet élément plan un peu dans l'intérieur, là où s'applique l'équation (2). Et l'on aura, en résumé, si dn désigne une normale horizontale menée dans σ à $d\chi$ ou à $d\chi_1$,

les deux conditions ou relations définies :

$$(3)\qquad \begin{cases} (\text{sur le contour libre } \chi) & h = 0, \\ (\text{sur le contour-paroi } \chi_1) & \dfrac{dh}{dn} = 0. \end{cases}$$

Quant au débit Q de la source, mesuré de même à travers une coupe verticale parallèle à χ et peu distante dans l'intérieur, il sera évidemment $K\frac{dh}{dn}(H+h)$ ou $K\frac{dh}{dn}H$, par unité de longueur du seuil, et vaudra en tout

$$(4)\qquad Q = \int_{\chi} KH\frac{dh}{dn}\,d\chi.$$

Il faudrait, toutefois, y laisser subsister h à côté de H, si H s'évanouissait (au moins en moyenne) à l'approche du seuil, comme h, et que la pente superficielle $\frac{dh}{dn}$ s'y exagérât indéfiniment [1].

---

[1] La substitution, au contour réel, d'un contour fictif voisin situé à l'intérieur de la nappe, et où ne s'observent plus qu'à très peu près les circonstances propres aux diverses parties du contour réel, constitue un procédé d'approximation, ayant ici pour but d'éviter ou d'éliminer la considération, qui serait difficile et très diverse suivant les cas, de la *composante verticale* des vitesses, supposée négligeable dans l'équation indéfinie (2), mais qui, effectivement, ne l'est plus au contour, tout au moins près du seuil où *surgissent* les filets fluides. On fait donc, ainsi, abstraction de *perturbations locales* compliquées, se produisant à la limite de la nappe.

Il en est, du reste, de même, dans la plupart des questions de Physique mathématique : les *conditions définies* usuelles n'y traduisent, en général, que l'influence d'ensemble, ou dominante en chaque endroit, des circonstances extérieures, sur le corps ou le système considérés; et elles négligent à dessein une infinité de détails, tenant à leur agencement ou, comme on dit, au mode d'application des actions exercées du dehors. Les géomètres avaient déjà fait, explicitement, cette remarque dans la théorie de l'élasticité, notamment pour les forces de compression, de traction, de flexion, de torsion, etc., appliquées vers les extrémités des tiges et au contour des plaques : mais elle s'étend à bien d'autres phénomènes.

§ III. — Lois du mouvement et débits de la source en temps de sécheresse, c'est-à-dire quand les pentes de superficie se trouvent beaucoup plus faibles que ne sont (du moins près du seuil de la source) celles du fond.

9. Les équations (2) et (3) sont quelque peu accessibles sous certaines conditions, mais surtout dans les deux cas extrêmes d'un seuil ou très haut, ou très bas, c'est-à-dire de dénivellations h soit négligeables par rapport aux profondeurs H de la nappe sous le seuil, soit, au contraire, très grandes en comparaison de ces profondeurs H.

Le premier cas, qui se présente en temps de sécheresse et avec un sous-sol concave, est de beaucoup le plus simple. Le binome $H + h$, dans (2), y est réductible à sa partie connue H; et le système (2), (3) d'équations, alors linéaire, est celui du problème classique du refroidissement d'une mince plaque plane, à bases σ imperméables, limitée par un contour ayant sa partie χ maintenue à la température zéro, mais le reste, χ_1, imperméable à la chaleur comme les bases. L'expression de h s'y réduit plus ou moins rapidement à la solution simple *fondamentale* de Fourier, dont la forme est $CUe^{-\alpha t}$, avec C constante arbitraire dépendant de l'état initial et U, α quantités essentiellement positives, l'une, U, fonction de x et de y, l'autre, α, constante, exclusivement dépendantes, toutes deux, de la configuration géométrique du sous-sol et de la perméabilité du sol [1].

Le débit Q de la source est, par suite, d'après (4), proportionnel à $Ce^{-\alpha t}$. On peut y appeler *coefficient de tarissement* le coefficient α du temps t dans l'exponentielle, analogue au *coefficient d'absorption ou d'extinction de la lumière* (mais dans l'espace ou pour une certaine épaisseur traversée) des milieux optiques opaques ou translucides. Il exprime, pour chaque ordonnée h de la surface libre au-dessus

---

[1] On peut voir, sur ce sujet capital des propriétés de la solution simple fondamentale, dans le problème du refroidissement, les pages 252 à 255 du Tome I de ma *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique, etc.*

du plan horizontal du seuil de la source, la *vitesse de décroissement* de son unité *actuelle* de longueur.

10. Quand, par exemple, μ, K, H étant constants, le plan de la nappe se réduit, en outre, à une bande indéfinie, de largeur L, comprise entre deux bords $x = 0$, $x = L$, dont le premier est le contour libre χ et, le second, le contour-paroi χ_1, avec circonstances initiales pareilles sur toute la longueur, la coordonnée x figure seule dans les équations : on est ramené au problème du refroidissement d'une barre prismatique homogène, latéralement imperméable, de longueur L, ayant son extrémité $x = 0$ plongée dans la glace fondante et son autre extrémité, $x = L$, imperméable à la chaleur comme ses faces.

Alors on trouve immédiatement, pour la solution fondamentale et pour le débit $q = KH\left(\frac{dh}{dx}\right)_{x=0}$ par unité de longueur du seuil, les formules

$$(5)\quad U = \sin\frac{\pi x}{2L}, \qquad \alpha = \frac{\pi^2 KH}{4\mu L^2}, \qquad q = \frac{\pi KH}{2L} C e^{-\alpha t} = \frac{\pi}{2} KH \frac{h_m}{L} = \frac{\pi}{2} KHI,$$

h_m désignant la dénivellation h maxima, celle ($Ce^{-\alpha t}$) qui se produit à la *ligne de faîte* $x = L$ de la bande, et, par suite, I désignant la *pente moyenne de superficie* de la nappe, quotient de h_m par la largeur L. Le débit de la source vaut donc $\frac{1}{2}\pi = 1,5708$ fois celui, KHI (par unité de longueur du seuil), qui se produirait si la pente de superficie avait, près du seuil, sa valeur moyenne générale I relative à toute la nappe et à l'époque considérée t.

Quant au coefficient de tarissement, α, il est, d'après la deuxième formule (5), proportionnel à la profondeur H de la nappe et inverse du carré de sa largeur L.

11. On peut qualifier de *bonne* une source dont le débit se conserve longtemps, c'est-à-dire dont le coefficient α de tarissement est très petit, et d'*également bonnes* deux sources où ce coefficient a la même valeur : la seconde formule (5) montre que la profondeur H (au-dessous des seuils), de leurs bassins respectifs d'alimentation, supposés de structure pareille, y est proportionnelle au carré L^2 de la largeur ou

étendue relative de ces bassins. De plus, si l'on y observe, au début, des dénivellations totales h_m identiques, ces dénivellations $Ce^{-\alpha t}$ restent égales à toute époque; et les débits respectifs q y sont sans cesse entre eux, d'après la troisième formule (5), comme les rapports correspondants $\frac{H}{L}$, ou $\left(\text{en abstrayant le facteur pareil } \frac{\sqrt{H}}{L}\right)$ comme les racines carrées $\sqrt{H}$ des profondeurs. Autrement dit, *la source à bassin d'alimentation le plus profond donne le plus grand débit,* les profondeurs étant comme les carrés des débits (par unité de longueur) simultanés.

Il en sera de même pour une forme quelconque du *plan* de la nappe et pour des profondeurs H quelconques, données en fonction de x et de y, pourvu qu'on passe d'une nappe à l'autre et, par suite, d'une source à l'autre, en multipliant les dimensions horizontales de la première nappe, ou les coordonnées x, y de ses divers points, par un même nombre k, et les profondeurs H correspondantes par son carré k^2. En effet, les équations qui régissent U et α, savoir

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(KH\frac{dU}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(KH\frac{dU}{dy}\right) = -\mu\alpha U, \\ (\text{sur } \chi) \quad U = 0, \qquad (\text{sur } \chi_1) \quad \frac{dU}{dn} = 0, \end{cases}$$

et où dx, dy, dn, H deviendront partout $k\,dx$, $k\,dy$, $k\,dn$, k^2H, continueront visiblement à être satisfaites par les mêmes systèmes de valeurs de U et de α. L'expression de h se conservera donc, dans le passage de la première nappe aux points homologues de la seconde; et les deux sources correspondantes seront *également bonnes.*

Les pentes de superficie $\frac{dh}{dn}$ varieront, de l'une à l'autre, avec les éléments linéaires dn, ou seront divisées par k; et les débits par unité de longueur, $KH\frac{dh}{dn}$, se trouveront multipliés par k, ou, les débits élémentaires $KH\frac{dh}{dn}d\chi$, qui ont le facteur linéaire horizontal $d\chi$ en plus, multipliés par k^2 et ainsi proportionnels aux profondeurs H. Tel sera donc aussi le rapport des débits Q totaux.

Cela posé, considérons, pour les deux sources également bonnes

dont il s'agit, le rapport $\frac{h}{H}$, dont la petitesse comparativement à l'unité est supposée par la théorie actuelle ; ce rapport y sera en raison inverse de H ou du débit total Q. Et si l'une des deux sources est *très forte,* c'est-à-dire pourvue d'un débit considérable, le rapport $\frac{h}{H}$ s'y trouvera incomparablement plus faible que dans l'autre, supposée de débit modéré. On pourra donc négliger, dans la première, les dénivellations h comparativement aux profondeurs H, ou y employer des relations comme (5), bien avant de pouvoir le faire dans la seconde. Or les sources que l'on capte pour le service des grandes villes sont, en général, exceptionnellement fortes. Il doit donc arriver souvent que les formules simples de ce paragraphe leur soient applicables, même en dehors des temps de sécheresse, ou peu après la cessation des pluies. Leurs débits normaux de la période d'été admettraient ainsi l'expression approchée simple $Ae^{-\alpha t}$.

Tel paraît être, notamment, d'après une soigneuse étude de M. Maillet, le cas de la source de Cérilly, l'une des principales de la Vanne, qui alimentent Paris où elles sont amenées sur la rive gauche de la Seine.

Une autre de ces sources de la Vanne, celle d'Armentières, également étudiée par M. Maillet, semble devoir, quoique supérieure à celle de Cérilly pour le volume et la constance, exiger la formule moins simple de débit annoncée au n° **4**, et où l'inverse du carré d'un sinus hyperbolique remplace l'exponentielle décroissante, à moins (plutôt) que, pour une source *aussi forte, à longue évolution,* le *second* terme simple de la solution de Fourier ne reste sensible *plusieurs mois* et ne donne à Q la forme $Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}$.

§ IV. — Influence, sur le débit, de petites pluies successives.

12. Supposons qu'une chute de pluie, uniforme sur tout le bassin, soit venue, à l'époque θ, c'est-à-dire un certain temps $t - \theta$ avant l'époque actuelle t, alors que le terme principal ou asymptotique de h était $CUe^{-\alpha\theta}$, ajouter presque instantanément à toutes les ordonnées h un petit accroissement commun η.

Prenant l'état d'alors, $CUe^{-\alpha\theta} + \ldots + \eta$, comme nouvel état initial h_0, nous aurons, pour expression asymptotique de h aux époques

ultérieures, le produit de $Ue^{-\alpha(t-\theta)}$ par la nouvelle valeur, C, de a constante arbitraire. Or, une méthode d'élimination due à Fourier, bien connue, montre que C′ sera le quotient, par le carré moyen de U sur toute l'aire σ, de la valeur moyenne du produit Uh_0 sur la même aire, et que ce quotient vaudra, ici, $Ce^{-\alpha\theta} + \iota\eta$, si ι désigne le rapport de la valeur moyenne de U à celle de U^2 $\left(\text{soit, par exemple, } \frac{4}{\pi}, \text{ dans le cas simple ci-dessus d'une bande indéfinie, où la valeur moyenne de } \sin\frac{\pi x}{2L} \text{ est } \frac{2}{\pi} \text{ et celle de son carré } \frac{1}{2}\right)$. Les valeurs ultérieures de h, asymptotiques ou relatives à t assez grand, seront donc

$$(C + \iota\eta e^{\alpha\theta})e^{-\alpha t}.$$

Il est clair que d'autres accroissements uniformes analogues η', η'', ..., survenus à des époques θ', θ'', ... postérieures à θ, ajouteront, de même, au coefficient de l'expression asymptotique ultérieure de h, de nouveaux termes $\iota\eta' e^{\alpha\theta'}$, $\iota\eta'' e^{\alpha\theta''}$, ...; en sorte que l'on aura, pour calculer les valeurs asymptotiques définitives de h, portant la trace de toutes les petites pluies venues de loin en loin alimenter la nappe, la formule

$$(6) \qquad h = U\left[Ce^{-\alpha t} + \iota\Sigma\eta e^{-\alpha(t-\theta)}\right].$$

Et le débit Q de la source, d'abord proportionnel à $Ce^{-\alpha t}$, le sera désormais à la somme

$$(7) \qquad Ce^{-\alpha t} + \iota\eta e^{-\alpha(t-\theta)} + \iota\eta' e^{-\alpha(t-\theta')} + \iota\eta'' e^{-\alpha(t-\theta'')} + \ldots.$$

A mesure que t grandit, le terme correspondant à chacune des pluies successives s'évanouit peu à peu, comparativement à ceux qu'introduisent les pluies récentes, pourvu toutefois que celles-ci ne soient pas évaporées avant d'avoir atteint la nappe souterraine [1].

---

[1] C'est ce qui, dans la saison d'été, leur arrive le plus souvent, comme il a été dit au n° 1.

§ V. — Mise en compte de la capillarité.

13. A une seconde approximation, il y aurait lieu de tenir compte de la réduction, que j'appellerai ζ, éprouvée par la pression p et par la charge φ, dans la nappe, à raison de la *tension superficielle* de l'eau sur chacun des innombrables *ménisques capillaires* constituant la surface libre souterraine, réduction uniforme et invariable, dans le cas d'un sol homogène, pour le moins autant que l'est, aux profondeurs supposées, la température elle-même, et fonction déterminée de x et de y, au même degré d'approximation, dans un sol ayant sa structure variable d'une verticale à l'autre. On aurait donc, non plus $\varphi = h$, mais $\varphi = h - \zeta$; et il conviendrait de prendre φ, au lieu de h, comme inconnue; ce qui laisserait subsister entièrement, en φ, la forme de l'équation indéfinie (2), sauf la substitution, à la fonction donnée H, de la fonction analogue $H + \zeta$. Car la hauteur $H + h$ des volumes prismatiques élémentaires mouillés deviendrait $H + \zeta + \varphi$.

Il est visible que la relation spéciale au contour-paroi χ_1 resterait aussi la même, ou serait $\frac{d\varphi}{dn} = 0$.

Mais la condition relative au contour libre χ serait généralement rendue plus complexe par l'intervention de l'action capillaire aux surfaces libres y existant. Il semble toutefois possible de supprimer cette intervention au moyen d'un certain dispositif d'orifice, savoir, en prolongeant vers le haut le sous-sol au-dessus du seuil, à part une fente horizontale allongée, de faible hauteur, mais *non capillaire*. Alors, la pression p intérieure se trouvant sensiblement nulle à l'orifice, ou plus forte de ζ que sous la surface libre souterraine, l'écoulement sur le seuil exigera une altitude de celle-ci, dans le voisinage, excédant de ζ l'altitude du seuil; et la condition relative au contour libre χ, ou concernant les parties, contiguës à χ, de la nappe infiltrée, sera sensiblement $h = \zeta$, c'est-à-dire $\varphi = 0$.

Rien ne sera donc changé à la forme des équations du problème ni, par suite, à la solution, sauf toujours la substitution, partout, de $H + \zeta$ à H, jusque dans la hauteur de la section fluide intérieure, verticale et parallèle à χ, fournissant le débit Q de la nappe.

§ VI. — Régime moins simple qui tend à s'établir en hautes eaux, quand les pentes du fond sont, au contraire, négligeables comparativement à celles de la surface.

14. — Après avoir étudié le cas simple de dénivellations h très petites par rapport aux profondeurs H de la nappe sous le plan horizontal du seuil de la source, considérons le cas, opposé, où le fond imperméable se confondrait avec ce plan horizontal et où, par suite, H s'annulerait. On pourra effectivement, sans grande erreur, durant les périodes de fortes eaux, admettre qu'il en soit ainsi, quand la majeure partie de la nappe liquide se trouvera au-dessus du plan horizontal du seuil, sans que le sous-sol ait une forme très convexe.

Les équations (2) et (3) deviendront, en multipliant par 2 la première,

$$(8)\quad \begin{cases} 2\mu\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\dfrac{d.h^2}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\dfrac{d.h^2}{dy}\right), \\ (\text{sur le contour libre } \chi)\ h = 0,\ (\text{sur le contour paroi } \chi_1)\ \dfrac{dh}{dn} = 0. \end{cases}$$

L'équation indéfinie n'étant pas linéaire, l'intégration générale de ce système paraît inabordable. Aussi nous bornerons-nous à lui chercher une solution particulière, celle qui exprimera la forme vers laquelle tend la surface libre, s'il lui arrive de se régler comme dans le cas précédent, c'est-à dire de garder très sensiblement, après une période préparatoire plus ou moins longue, d'invariables rapports entre toutes ses ordonnées h, ensemble décroissantes. Comme, d'une part, nous obtiendrons une telle solution, du moins pour les contours χ, χ_1 de nappe les plus simples, et que, d'autre part, l'expérience semble indiquer la réalisation assez rapide d'un même régime à partir d'états initiaux quelconques, ou, par suite, la convergence de *toutes* les intégrales particulières vers une *forme commune*, il est clair que la solution, relativement très simple, à laquelle nous parviendrons, ou exprimant un mode d'écoulement qui se conserve, ne pourra pas différer de l'intégrale de régime cherchée; car elle sera tenue de la reproduire

finalement avec une approximation *indéfinie* et, cela, sans *aucune* altération de sa propre forme, puisqu'elle n'en éprouve pas. Nous démontrerons d'ailleurs sa stabilité, en faisant voir qu'elle est effectivement une sorte d'*asymptote*, à laquelle aboutissent *physiquement* très vite toutes les intégrales qui en différaient peu initialement.

15. Prenons pour état initial cette forme limite que nous appellerons h_0, censée acquise ainsi par la fonction h au bout d'un certain temps; et, en comptant désormais t à partir de la fin de ce temps choisie comme nouvelle origine, nous aurons pour h le produit, $h_0 \mathrm{T}$, de la fonction h_0 de x et de y, par une fonction, T, à valeur *initiale* 1, du temps t seul. Or, l'équation indéfinie ci-dessus, la première (8), divisée par $\mu \mathrm{T} h$, c'est-à-dire par $\mu \mathrm{T}^2 h_0$, devient alors

$$2\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}^2} = \frac{1}{\mu h_0}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d.h_0^2}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d.h_0^2}{dy}\right)\right].$$

Ses deux membres, indépendants, le premier de x et de y, le second de t, se réduisent nécessairement à une constante -2α. L'on a donc, d'une part, grâce à une intégration immédiate,

$$(9) \qquad \frac{1}{\mathrm{T}} = 1 + \alpha t, \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{1+\alpha t}, \qquad h = \frac{h_0}{1+\alpha t},$$

et, d'autre part, pour déterminer, avec α, la forme de h_0, le système d'équations

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\dfrac{d.h_0^2}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\dfrac{d.h_0^2}{dy}\right) + 2\alpha\mu h_0 = 0, \\ (\text{sur le contour libre } \chi)\ h_0 = 0, \ (\text{sur le contour-paroi } \chi_1)\ \dfrac{dh_0}{dn} = 0. \end{cases}$$

Les flux $\mathrm{K}\frac{dh}{dn}h$, ou $\left(\mathrm{K}h_0\frac{dh_0}{dn}\right)\mathrm{T}^2$, à travers l'unité de longueur de coupes verticales quelconques faites dans la nappe, seront tous proportionnels à T^2. Par suite, le débit Q du seuil ou de la source décroîtra comme l'inverse du carré $(1+\alpha t)^2$.

16. — Pour fixer les idées, supposons que, μ, K étant constants et la coordonnée y disparaissant des équations, le plan de la nappe soit,

comme au n° **10**, la bande, de longueur indéfinie et de largeur L, comprise entre le *seuil* rectiligne $x = 0$ et la *crête* parallèle $x = L$, *thalweg* et *faîte* où l'on aura ainsi, respectivement,

$$h_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dh_0}{dx} = 0.$$

En vue de simplifier nos équations, posons

$$(11) \qquad \xi = \frac{x}{L}, \qquad \eta = \frac{h_0}{M}, \qquad \alpha = \frac{3c^2 KM}{2\mu L^2},$$

formules où ξ, η seront, pour tenir lieu de x et de h_0, une nouvelle variable indépendante et une nouvelle fonction, croissantes toutes deux de 0 à 1, où, par conséquent, M est la valeur de h_0 pour $x = L$, et où, enfin, c désigne une constante positive, convenablement choisie. Le système (10), dans lequel les dérivées pourront s'indiquer par des accents, deviendra

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2.\eta^2}{d\xi^2} + 3c^2\eta = 0, \qquad \text{ou} \qquad 2\dfrac{d.\eta\eta'}{d\xi} + 3c^2\eta = 0, \\ (\text{pour } \xi = 0) \;\; \eta = 0, \quad (\text{pour } \xi = 1) \;\; \eta' = 0 \;\text{ et }\; \eta = 1. \end{cases}$$

Multiplions l'équation indéfinie par $\eta\eta' d\xi$ ou par $\eta\, d\eta$ et intégrons, en tenant compte des conditions relatives à $\xi = 1$. Nous aurons l'équation différentielle première du profil de la surface :

$$(13) \qquad \eta^2\eta'^2 = c^2(1 - \eta^3);$$

d'où

$$(13\ bis) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{c\sqrt{1 - \eta^3}}{\eta}.$$

Et une deuxième intégration, effectuée, après séparation des variables, à partir de la limite inférieure $\xi = 0$ où η s'annule, donnera l'équation finie du même profil :

$$(14) \qquad c\xi = \int_0^{\eta} \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{1 - \eta^3}}.$$

L'abscisse *proportionnelle* ξ de la surface libre est donc une certaine intégrale elliptique de l'ordonnée *analogue* η. Enfin, comme ξ, η atteignent en même temps leur limite supérieure 1, la constante c a, d'après (14), la valeur

$$(15) \qquad c = \int_0^1 \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{1-\eta^3}}.$$

Pour la calculer, posons $\eta = \gamma^{\frac{1}{3}}$; ce qui, transformant l'expression de c en $\frac{1}{3}\int_0^1 \gamma^{\frac{2}{3}-1}(1-\gamma)^{\frac{1}{2}-1}\,d\gamma$, donne l'intégrale eulérienne $\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$, égale à $\frac{\frac{1}{3}\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{2}{3}+\frac{1}{2})}$ ou à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{7}{6})}$, vu que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et que $\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)$. On a donc

$$(16) \qquad c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{7}{6})} = 0,86236 \text{ environ},$$

le calcul numérique s'effectuant, finalement, par la Table de Legendre pour les logarithmes décimaux de $\Gamma(n)$, dans l'intervalle des deux limites $n = 1$ et $n = 2$.

Il n'y a ainsi, pour l'équation de la nappe entre les deux coordonnées *relatives* ξ, η, qu'une forme *unique* (sans aucun paramètre variable) qui assure sa propre conservation aux diverses époques t. Et, en effet, l'on rend indépendante de la *donnée* M l'expression, $h_0\mathrm{T}$ ou

$$\mathrm{M}\eta\mathrm{T} = \frac{\mathrm{M}}{\alpha}\,\frac{\alpha\eta}{1+\alpha t},$$

de h, en l'écrivant, grâce à la dernière relation (11), $\frac{2\mu\mathrm{L}^2\eta}{3c^2\mathrm{K}}\left(\frac{1}{\alpha}+t\right)^{-1}$, et en posant $\frac{1}{\alpha}+t = \tau$ ou reculant de $\frac{1}{\alpha}$, dans le passé, l'origine des temps t que l'on désigne alors par τ. Il vient, d'abord, pour la dénivellation h, et, ensuite, pour sa valeur maxima actuelle (correspondant à $\eta = 1$) que nous dénommerons h_m, les formules

$$(17) \qquad h = \frac{2\mu\mathrm{L}^2}{3c^2\mathrm{K}}\,\frac{\eta}{\tau}, \qquad h_m = \frac{2\mu\mathrm{L}^2}{3c^2\mathrm{K}\tau}.$$

17. Ce résultat s'étend au cas plus général des équations (10).

Effectivement, on remarque, en divisant la première de ces équations par α^2 et les deux autres par α, qu'elles ne contiennent plus, au lieu de h_0 et de α, que leur rapport mutuel $\frac{h_0}{\alpha}$. Appelons, par exemple, ζ ce rapport, fonction de x et de y, que l'analogie avec le cas particulier traité ci-dessus porte à regarder comme unique, mais qui, de toute manière, est indépendante de la hauteur initiale M de la nappe : et, d'une part, ζ vérifiera les équations

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d.\zeta^2}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d.\zeta^2}{dy}\right) = -2\mu\zeta, \\ (\text{sur le contour } \chi)\ \zeta = 0, \quad (\text{sur le contour } \chi_1)\ \frac{d\zeta}{dn} = 0; \end{cases}$$

d'autre part, la substitution à t de la nouvelle variable τ pour exprimer le temps, donnera à la dernière relation (9), la forme

$$(19)\qquad h = \frac{\zeta}{\tau}.$$

La comparaison de cette formule à la première (17) montre que la fonction ζ y avait la valeur $\frac{2\mu L^2}{3c^2 \mathrm{K}}\eta$.

18. Il serait désirable d'obtenir l'expression de ζ pour des nappes moins spéciales qu'une simple bande indéfinie de largeur L, notamment pour une nappe de révolution autour de l'axe des z, adossée à un rebord ou *faîte* circulaire, et se déversant peu à peu sur un seuil ou *thalweg* concentrique à ce rebord. Comme alors μ, K, ζ sont supposés dépendre seulement de la distance r à l'axe, exprimée par $\sqrt{x^2+y^2}$, l'on a

$$\mathrm{K}\frac{d.\zeta^2}{d(x,y)} = \frac{\mathrm{K}}{r}\frac{d.\zeta^2}{dr}(x,y),$$

$$\frac{d}{d(x,y)}\left(\mathrm{K}\frac{d.\zeta^2}{d(x,y)}\right) = \frac{(x^2,y^2)}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\mathrm{K}}{r}\frac{d.\zeta^2}{dr}\right) + \left(\frac{\mathrm{K}}{r}\frac{d.\zeta^2}{dr}\right);$$

et l'équation indéfinie (18) devient

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\mathrm{K}r\frac{d.\zeta}{d\cdot}\right. = -2\mu\zeta$$

ou

$$d.\left(\mathrm{K}r\zeta\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 = -(\mu\mathrm{K}r^2)\,d\left(\frac{2\zeta^3}{3}\right).$$

Or, on ne lui voit d'intégrale première formulable que *si le produit* $\mu\mathrm{K}r^2$ *est constant* : cas où il vient, en posant $\zeta = \frac{\mathrm{M}}{\alpha}\eta$, c'est-à-dire en appelant M la hauteur initiale h_0 maxima, qui se produit au faîte (où η aura sa dérivée en r nulle et vaudra dès lors 1),

$$\left(\mathrm{K}r\eta\frac{d\eta}{dr}\right)^2 = \frac{2\alpha}{3\mathrm{M}}(\mu\mathrm{K}r^2)(1-\eta^3)$$

ou

$$\frac{\mathrm{K}}{\mu}\frac{d\eta^2}{dr^2} = \frac{2\alpha}{3\mathrm{M}}\,\frac{1-\eta^3}{\eta^2}. \tag{20}$$

En général, le rapport $\frac{\mathrm{K}}{\mu}$ sera le produit d'une de ses valeurs, que nous appellerons $\frac{\mathrm{K}_0}{\mu_0}$, par une fonction donnée, essentiellement positive, $\varpi(r)^2$, de la distance r à l'axe, fonction où l'on peut faire $\varpi(r) > 0$. Cela posé, partis du thalweg pour cheminer le long d'un rayon en allant *vers le faîte*, introduisons, au lieu de r, une variable indépendante *positive* ξ, *d'abord nulle*, définie de proche en proche par l'équation différentielle

$$\mathrm{L}\,d\xi = \frac{\pm dr}{\varpi(r)}, \tag{21}$$

où l'on aura à choisir la longueur *constante* L de manière que ξ atteigne la valeur 1, comme η, à l'instant même de l'arrivée au faîte. Si nous appelons c la constante $\sqrt{\frac{2\mu_0\alpha\mathrm{L}^2}{3\mathrm{K}_0\mathrm{M}}}$, ainsi définie par une formule toute pareille à la troisième (11), la relation (20) deviendra identiquement, en η et ξ, l'équation différentielle (13). Et, comme les conditions adjointes seront encore $\eta = 0$ pour $\xi = 0$, $\eta' = 0$ et $\eta = 1$ pour $\xi = 1$, l'équation finie entre ξ et η sera toujours (14), avec la valeur numérique (16) de la constante c.

Mais il ne faudra pas oublier que *cette extension, à une nappe de révolution, de l'intégrale obtenue pour une nappe cylindrique à*

génératrices horizontales, implique la constance du produit $\mu K r^2$ *à toute distance* r *de l'axe.*

Si, en particulier, le rapport $\frac{K}{\mu}$ des deux coefficients définissant la perméabilité du sol est invariable, ces deux coefficients physiques de la masse filtrante devront être inverses de la distance r à l'axe, ou la *perméabilité* croître, à l'approche de l'axe, inversement à l'aire des cylindres circulaires verticaux constituant les sections d'écoulement, pour que les formules simples ci-dessus s'appliquent. Et comme l'on aura alors $\varpi(r) = 1$, L sera la largeur de la bande liquide annulaire, ou la distance du faîte au thalweg.

Du reste, le cas d'une bande rectiligne de longueur indéfinie, avec K, μ constants, se trouve compris dans celui-là; car il suffira, pour l'obtenir, de supposer infinis les deux rayons du faîte et du thalweg, sans que leur intervalle cesse d'être fini.

19. Reprenant un instant cette première hypothèse d'une nappe à fond rectangulaire de longueur indéfinie, j'appellerai A, par unité de longueur, le volume initial *apparent* (c'est-à-dire y compris la terre ou le sable interposés) de la nappe liquide. Il équivaut à l'aire de sa section verticale faite suivant les x. Or, décomposons cette section en minces bandes horizontales, de dimensions $L - x$ et dh_0, ou $L(1 - \xi)$ et $M d\eta$. Elle aura pour valeur $\frac{LM}{c}\int_0^1 (c - c\xi)\, d\eta$; et il viendra, à raison de l'excédent de (15) sur (14), puis grâce à une intégration par parties évidente, dans laquelle s'annule le terme intégré,

$$(22)\quad \begin{cases} A = \frac{LM}{c}\int_0^1 d\eta_1 \int_{\eta_1}^1 \frac{\eta_1\, d\eta_1}{\sqrt{1-\eta_1^3}} = \frac{LM}{c}\int_0^1 \frac{\eta_1^2\, d\eta_1}{\sqrt{1-\eta_1^3}} = \frac{2LM}{3c}\left(-\sqrt{1-\eta_1^3}\right)_0^1 = \frac{2LM}{3c}; \\ \text{d'où} \\ M = \frac{3c}{2}\frac{A}{L} = 1,2935\frac{A}{L}. \end{cases}$$

La crête de la nappe est donc, au-dessus du seuil, à une hauteur h_m valant 1,2935 fois la *hauteur moyenne,* quotient de l'aire ou du volume (A initialement) par la largeur L.

Si nous éliminons maintenant M, par la dernière formule (22), de l'expression (11) de α, coefficient qui exprime ici la vitesse $-T'$, *initiale*, de décroissement des ordonnées h par unité de leur longueur, il vient

$$(23) \qquad \alpha = \frac{9c^3}{4}\frac{KA}{\mu L^3} = 5,772\frac{KA}{4\mu L^3}.$$

Ce coefficient prend ainsi (à part le facteur numérique $9c^3$ ou 5,772 remplaçant le carré plus grand π^2) la forme, (5), qu'il avait dans le cas d'une nappe profonde, étudié d'abord, où le volume apparent A, alors peu variable, égalait sensiblement le produit LH. Mais la fonction T, dans h, était $e^{-\alpha t}$, ou l'inverse de $e^{\alpha t}$ et non, comme ici, de $1 + \alpha t$; en sorte que ce coefficient α de décroissement relatif s'appliquait à toutes les époques positives t et méritait le nom de *coefficient de tarissement :* il ne s'applique ici qu'à l'instant $t = 0$.

Le débit de l'unité de longueur de la nappe, à travers la section verticale d'abscisse x, est $K\frac{dh}{dx}h$, c'est-à-dire, d'après (17), $\frac{4\mu^2 L^3}{9c^4 K\tau^2}\eta\eta'$, ou $\frac{4\mu^2 L^3}{9c^3 K\tau^2}\sqrt{1-\eta^3}$ en vertu de (13 *bis*). Sur le seuil, où η s'annule, on aura donc successivement, vu la seconde relation (17), pour ce débit, qui est alors celui de l'unité de longueur de la source alimentée par la nappe :

$$(24) \qquad q = \frac{4\mu^2 L^3}{9c^3 K\tau^2} = \frac{cKh_m^2}{L} = cKIh_m,$$

où I représente la *pente superficielle moyenne* de la nappe, quotient de la hauteur actuelle h_m par la largeur L. On remarquera que cette expression de q reviendrait à celle, $\frac{1}{2}\pi KIH$, du cas plus simple examiné précédemment et auquel s'applique la dernière formule (5), si l'on prenait ici, comme section H, la fraction $\frac{2c}{\pi}$ (les $\frac{549}{1000}$) de la section maxima h_m.

§ VII. — Stabilité de ce régime.

20. Il reste à s'assurer que la forme primitive, *arbitraire*, de la nappe *tend effectivement* à se régler, c'est-à-dire qu'un *véritable*

régime existe; et il y aurait lieu aussi de voir quelles fractions ou de la hauteur, ou du volume, primitifs, qu'on peut supposer connus dans chaque cas, subsisteraient encore au moment où le régime pourrait être censé atteint, fractions équivalant précisément aux données M ou A des formules ci-dessus. Nous démontrerons seulement l'existence du régime ou, en d'autres termes, sa stabilité.

Supposons, à cet effet, que la forme initiale de h présente, par rapport à une de celles, h_0, qui se conservent, d'assez faibles écarts pour permettre de négliger leurs carrés dans les calculs. Prenant le cas général des équations (8), (9), (18) et (19), soit $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ ce que seront devenus les écarts en question, ou ce que vaudra $h - h_0 T$, après un temps t modéré, laissant encore ε petit. Je n'appelle pas simplement ε la différence $h - h_0 T$, mais je lui attribue cette forme, en apparence moins simple, pour que, dans le second membre de l'équation indéfinie (8), les expressions $K \frac{d.h^2}{d(x, y)}$, donnent, chacune, un seul terme où figure ε, terme qui sera en $\frac{d\varepsilon}{d(x, y)}$ et non, de plus, un terme en ε non différentié, qui compliquerait notablement ce second membre.

Les expressions de h et de h^2 seront alors respectivement, avec nos notations, l'une, $h_0 T + \frac{\varepsilon}{\zeta}$, l'autre, $h_0^2 T^2 + 2 \frac{h_0}{\zeta} T\varepsilon$ ou $h_0^2 T^2 + 2\alpha T\varepsilon$; et l'équation indéfinie (8), divisée, après suppression des termes où ne figure pas ε, par $2\alpha T$, c'est-à-dire multipliée par $\frac{\tau}{2}$, sera

$$(25) \qquad \frac{\mu}{\zeta} \frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{d}{dx}\left(K \frac{d\varepsilon}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K \frac{d\varepsilon}{dy}\right).$$

21. Si nous adoptons provisoirement comme variable indépendante, au lieu du temps τ, son logarithme naturel $\log \tau$, que nous appellerons θ, cette équation indéfinie en ε deviendra

$$(26) \qquad \frac{\mu}{\zeta} \frac{d\varepsilon}{d\theta} = \frac{d}{dx}\left(K \frac{d\varepsilon}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K \frac{d\varepsilon}{dy}\right).$$

Complétée par les deux relations définies, évidemment déduites

de (3),

$$(27)\qquad \begin{cases} \varepsilon = 0 \text{ (sur le contour libre } \chi), \\ \dfrac{d\varepsilon}{dn} = 0 \text{ (sur le contour paroi } \chi_1), \end{cases}$$

elle nous ramène, comme dans le cas simple de dénivellations h négligeables devant les profondeurs H, au problème du refroidissement d'une plaque plane, encore à bases σ imperméables, avec contour χ maintenu à la température zéro et contour χ_1 imperméable, mais d'une conductibilité, K, et d'une capacité calorifique, $\frac{\mu}{\zeta}$, tout autres qu'alors.

En appelant θ_0 la valeur initiale, $\log\frac{1}{\alpha}$, de θ, soient : $CVe^{-\beta(\theta-\theta_0)}$ la solution simple *fondamentale* de ce nouveau problème de refroidissement; $e^{-\beta'(\theta-\theta_0)}$ l'exponentielle de la solution particulière (simple ou composée de plusieurs solutions simples) venant après la solution fondamentale; enfin, ε_0, la petite fonction de x et de y qui exprime les valeurs données de ε pour $\theta = \theta_0$. Comme on pourra, en modifiant le coefficient α auquel sont proportionnelles les valeurs initiales de la solution *réglée* h_0T, faire varier, pour l'état initial donné, les valeurs correspondantes ε_0, de quantités en raison directe du changement même de α, rien n'empêchera de choisir α par la condition d'annuler l'intégrale $\int_\sigma V\varepsilon_0\, d\sigma$, c'est-à-dire le coefficient C de la solution fondamentale. L'expression de ε commencera donc au terme en $e^{-\beta'(\theta-\theta_0)}$, que l'on pourra, si W désigne, *dans chaque cas,* une fonction de x et de y généralement comparable à l'unité, écrire $\varepsilon_0 W e^{-\beta'(\theta-\theta_0)}$: ce sera l'expression asymptotique ou la partie principale de ε. Et la substitution, à $\theta - \theta_0$, de $\log\tau + \log\alpha$, ou de $\log(1+\alpha t)$, donnera

$$(28)\qquad \varepsilon = (\text{environ})\frac{\varepsilon_0 W}{(1+\alpha t)^{\beta'}}.$$

22. Les petits *écarts* $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ tendront vers zéro, *comparativement à la partie principale de h,* qui est h_0T, inverse de $1+\alpha t$, si l'exposant β' excède 1. Or β' est plus grand que β et l'on reconnaît aisément que β a la valeur 2.

Il résulte, en effet, de la remarque ci-dessus, touchant la possibilité de faire disparaître, de ε, le terme fondamental $CVe^{-\beta(\theta-\theta_0)}$, par un choix convenable du paramètre α, que nous connaissons déjà, *implicitement*, une solution particulière des équations (26) et (27). Car, dans le problème à l'occasion duquel se sont présentées ces relations, les petits écarts, $\frac{\varepsilon}{\zeta}$, les plus simples qu'on puisse imaginer, d'avec une première forme *se conservant* $h_0 = \frac{\zeta}{\tau} = \zeta\left(\frac{1}{\alpha} + t\right)^{-1}$, consistent dans l'excédent, sur cette première forme h_0, d'une autre *infiniment voisine se conservant aussi,* et obtenue par une variation infiniment petite $\delta\frac{1}{\alpha}$ du paramètre $\frac{1}{\alpha}$. Il vient ainsi, comme écarts $\frac{\varepsilon}{\zeta}$, l'expression $-\zeta\left(\frac{1}{\alpha} + t\right)^{-2}\delta\frac{1}{\alpha}$; ce qui donne ε proportionnel à $\frac{\zeta^2}{(1+\alpha t)^2}$ ou à $\zeta^2 e^{-2(\theta-\theta_0)}$. Or, comme cette dernière expression *a même signe dans toute l'étendue de la nappe,* elle constitue bien la solution *fondamentale;* et l'on peut poser

$$\beta = 2, \qquad V = \zeta^2. \tag{29}$$

Donc, l'exposant β', au second membre de (28), excède 2; et la solution $h = h_0 T$ est stable.

23. Mais la simplicité de ces résultats invite à chercher les autres solutions simples du même problème de refroidissement, c'est-à-dire des équations (26) et (27) en ε. Si nous désignons par $CVe^{-\beta(\theta-\theta_0)}$ l'une quelconque d'entre elles, la relation indéfinie en V, que compléteront les conditions d'annulation de V ou de $\frac{dV}{dn}$ au contour, sera

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right) = -\beta\frac{\mu}{\zeta}V. \tag{30}$$

Multiplions-la par ζ^2 et retranchons-en, multipliée elle-même par V, l'équation analogue en ζ^2, qui n'est autre que la première (18) (n° **17**). En appelant U le quotient de V par ζ^2, ou posant

$$V = \zeta^2 U, \tag{31}$$

il viendra immédiatement l'équation indéfinie en U :

$$(32)\qquad \frac{d}{dx}\left(K\zeta^4\frac{dU}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\zeta^4\frac{dU}{dy}\right)=-(\beta-2)\mu\zeta^3U.$$

24. Comme c'est en fonction de ζ, non de x et de y, que la solution fondamentale s'est exprimée simplement, nous n'avons quelque espoir d'obtenir les fonctions U que si elles comportent de même une expression en ζ seul. Nous nous bornerons donc aux nappes pouvant être définies, à chaque instant, au moyen d'une seule *coordonnée*, r, x, ..., comme sont les nappes de révolution (n° **18**), cylindriques dans un cas extrême. Alors les dérivées $\frac{dU}{d(x,y)}$ deviendront $\frac{dU}{d\zeta}\frac{d\zeta}{d(x,y)}$; et les deux produits $K\zeta^4\frac{dU}{d(x,y)}$, dans (32), s'écriront $\left(\zeta^3\frac{dU}{d\zeta}\right)\left[\frac{K}{2}\frac{d.\zeta^2}{d(x,y)}\right]$. Cette équation (32), développée en y utilisant l'équation indéfinie (18), employant la notation Δ_1 de Lamé pour le premier paramètre différentiel de ζ, enfin, divisant par $\mu\zeta$, et transposant un terme, prendra ainsi la forme

$$(33)\qquad \frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^3\frac{dU}{d\zeta}\right)=\left(\zeta^3\frac{dU}{d\zeta}\right)-(\beta-2)\zeta^2U.$$

Or elle ne devient, comme nous le désirons, une équation différentielle en U et ζ, sans autre variable, que si l'équation indéfinie (18) en ζ admet une intégrale première reliant l'expression $\frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2$ à ζ seul. Nous avons trouvé (n° **18**) que, dans la nappe de révolution, cela a lieu seulement lorsque le produit $\mu K r^2$ est constant.

Admettons donc qu'il en soit ainsi. Alors, $\Delta_1\zeta$ se confondant avec $\pm\frac{d\zeta}{dr}$ et ζ égalant (n° **18**) $\frac{M}{\alpha}\eta$, d'une part, la formule (20) donne

$$(33\,bis)\qquad \frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2 \quad\text{ou}\quad \frac{M^2}{\alpha^2}\left(\frac{K}{\mu}\frac{d\eta^2}{dr^2}\right)=\frac{2M}{3\alpha}\frac{1-\eta^3}{\eta^2};$$

et, d'autre part, l'équation (33), multipliée par $\frac{3\alpha^2}{M^2}$, devient ensuite, grâce au dédoublement évident d'un terme,

$$(34)\qquad \frac{2}{\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^3\frac{dU}{d\eta}\right)=2\eta\frac{d}{d\eta}\left(\eta^3\frac{dU}{d\eta}\right)+3\left(\eta^3\frac{dU}{d\eta}\right)-3(\beta-2)\eta^2U.$$

Telle sera l'équation différentielle à intégrer, où l'on voit que la variable η n'est autre que ζ, au facteur constant près $\frac{M}{\alpha}$.

25. Si l'on met pour U une puissance, η^λ, de la variable, le premier membre sera proportionnel à $\eta^{\lambda-1}$ et, le second, à $\eta^{\lambda+2}$. Tous les termes sont donc, dans *chaque* membre en particulier, d'un même degré d'homogénéité : cas où l'on sait que l'équation différentielle s'intègre aisément, en séries procédant suivant des puissances ascendantes, entières ou fractionnaires, de η [1]. Posons

$$(35)\qquad \varphi(\lambda) = 2\lambda(\lambda+2), \qquad f(\lambda) = 2\lambda^2 + 7\lambda - 3(\beta - 2),$$

et nous trouverons comme intégrale générale la somme des deux intégrales particulières ci-après, multipliées respectivement par deux constantes arbitraires :

$$(36)\qquad 1 + \frac{f(0)}{\varphi(3)}\eta^3 + \frac{f(0)}{\varphi(3)}\frac{f(3)}{\varphi(6)}\eta^6 + \frac{f(0)}{\varphi(3)}\frac{f(3)}{\varphi(6)}\frac{f(6)}{\varphi(9)}\eta^9 + \ldots,$$

$$(37)\qquad \frac{1}{\eta^2} + \frac{f(-2)}{\varphi(1)}\eta + \frac{f(-2)}{\varphi(1)}\frac{f(1)}{\varphi(4)}\eta^4 + \frac{f(-2)}{\varphi(1)}\frac{f(1)}{\varphi(4)}\frac{f(4)}{\varphi(7)}\eta^7 + \ldots.$$

Ces deux séries ont la formule commune

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} &\eta^\alpha + \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha+3)}\eta^{\alpha+3} + \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha+3)}\frac{f(\alpha+3)}{\varphi(\alpha+6)}\eta^{\alpha+6} \\ &\quad + \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha+3)}\frac{f(\alpha+3)}{\varphi(\alpha+6)}\frac{f(\alpha+6)}{\varphi(\alpha+9)}\eta^{\alpha+9} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

où α annule le polynome $\varphi(\alpha)$ et admet, par conséquent, les deux déterminations 0, -2.

Quelle que soit la valeur finie attribuée à β, paramètre unique figurant dans les deux polynomes du second degré $\varphi(\lambda)$, $f(\lambda)$, ou plutôt seulement dans le dernier, la suite infinie (38) est convergente,

---

[1] *Voir*, par exemple, le Tome II (*Compléments*, p. 305) de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*.

à la manière de la série, d'une forme bien connue,

$$(39)\qquad \text{const.} + \frac{\eta^3}{1^{\frac{3}{2}}} + \frac{\eta^6}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{\eta^9}{3^{\frac{3}{2}}} + \ldots + \frac{\eta^{3i}}{i^{\frac{3}{2}}} + \ldots;$$

car, dans (38), le rapport du $(i+1)^{\text{ième}}$ terme au précédent est

$$(40)\qquad \frac{f(\alpha+3i-3)}{\varphi(\alpha+3i)}\eta^3 = \frac{2(\alpha+3i)^2 - 5(\alpha+3i) - 3(\beta-1)}{2(\alpha+3i)(\alpha+3i+2)}\eta^3$$

ou bien, *sensiblement,* en divisant *haut et bas* par $2(\alpha+3i)^2$, ordonnant par rapport aux puissances négatives de $\alpha+3i$ et supposant finalement i très grand,

$$(40\ bis)\qquad \left[1 - \frac{9}{2(\alpha+3i)} + \frac{3(7-\beta)}{2(\alpha+3i)^2} + \ldots\right]\eta^3 = \left(1 - \frac{3}{2i}\right)\eta^3,$$

précisément, sous la dernière forme, comme dans (39), où le rapport analogue est, exactement, du moins pour $i > 1$,

$$\left(1 - \frac{1}{i}\right)^{\frac{3}{2}}\eta^3.$$

26. Mais il faut tenir compte des conditions relatives aux deux contours χ et χ_1, c'est-à-dire, respectivement, aux deux limites $\eta = 0$, $\eta = 1$.

Le produit $U\eta^2$, expression de V (à un facteur constant près), doit s'annuler pour $\eta = 0$, valeur de la variable qui annule la série (36), mais qui réduit (37), multipliée par η^2, à l'unité. Donc la constante arbitraire affectant (37) dans l'expression de U sera nulle; et il restera comme seule valeur possible de U, à un facteur constant près, la série (36).

Enfin, la dérivée $\frac{dV}{dr}$ doit devenir zéro à la limite $\eta = 1$, où la série (39) et, par suite, les séries (38), (36) sont encore convergentes. Comme, dans le produit $V = \eta^2 U$, la dérivée de η en r s'annule, d'après (20), à la limite $\eta = 1$, il faudra et il suffira que $\frac{dU}{dr}$, c'est-à-dire $\frac{dU}{d\eta}\frac{d\eta}{dr}$, s'y annule aussi, ou, encore d'après (20), que l'on ait

$$(41)\qquad \frac{dU}{d\eta}\sqrt{1-\eta^3} = 0 \quad (\text{à la limite } \eta = 1).$$

Or, la dérivée, en η, de la série (36) est la nouvelle série

$$(42)\qquad 3\frac{f(0)}{\varphi(3)}\eta^2 + 6\frac{f(0)}{\varphi(3)}\frac{f(3)}{\varphi(6)}\eta^5 + 9\frac{f(0)}{\varphi(3)}\frac{f(3)}{\varphi(6)}\frac{f(6)}{\varphi(9)}\eta^8 + \ldots,$$

où le rapport du $i^{\text{ième}}$ terme au précédent devient très sensiblement, pour i assez grand, en utilisant la première expression (40 *bis*) prise avec α nul, $\frac{i}{i-1}\left(1 - \frac{3}{2i} + \frac{7-\beta}{6i^2}\right)\eta^3$, c'est-à-dire

$$(43)\qquad \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{-1}\left(1 - \frac{3}{2i} + \frac{7-\beta}{6i^2}\right)\eta^3 = \left(1 - \frac{1}{2i} + \frac{4-\beta}{6i^2}\right)\eta^3,$$

et même $\left(\text{si l'on néglige les termes en } \frac{1}{i^2}\right)$ $\frac{2i-1}{2i}\eta^3$, comme dans la série

$$(44)\qquad (1 - \eta^3)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\eta^3 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\eta^6 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2i-1}{2i}\eta^{3i} + \ldots.$$

On voit ainsi que, η tendant vers la limite 1, la dérivée (42) deviendra comparable à l'inverse de $\sqrt{1-\eta^3}$ et n'aura pas son produit par $\sqrt{1-\eta^3}$ évanouissant, *à moins qu'on ne choisisse* β, *de manière à annuler identiquement tous les termes de la série* (42) *à partir de l'un quelconque d'entre eux* [1]. Donc l'équation transcendante

---

[1] Pour apprécier et comparer de plus près les rapports des termes très éloignés correspondants dans les deux séries (42) et (44), on peut mettre la dernière expression (43) sous la forme très approchée $\frac{2i-1}{2i}\eta^3 e^{\frac{4-\beta}{6i^2}}$. Elle signifie que le rapport d'un terme au précédent, dans la série (42), est sensiblement le produit du rapport analogue dans la série (44) par l'exponentielle $e^{\frac{4-\beta}{6}\frac{1}{i^2}}$. Cela étant, si l'on compare, dans les deux séries, les termes éloignés, chacun à chacun, à partir des $i^{\text{ièmes}}$, les rapports successifs de ceux de la première série à ceux de la seconde égaleront tous le premier d'entre eux, multiplié par des exponentielles totales de la forme $e^{\frac{4-\beta}{6}\left[\frac{1}{(i+1)^2} + \frac{1}{(i+2)^2} + \frac{1}{(i+3)^2} + \cdots\right]}$, où l'exposant de e n'excédera jamais une valeur absolue assignable, aussi petite même qu'on le voudra, si l'on prend i assez grand, puisque la série formée par les inverses des carrés entiers

donnant les racines β est, ici,

$$(45) \qquad f(0)f(3)f(6)\ldots f(3i)\ldots = 0,$$

et toutes les valeurs de β possibles sont celles qui annulent le facteur $f(3i)$, où i désignerait un entier positif (ou, plutôt, *non* négatif) quelconque. Il viendra, vu la seconde formule (35),

$$(46) \qquad \beta = 2 + i(6i + 7), \text{ où } i \text{ aura toutes les valeurs } 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Quant aux fonctions U correspondantes, ce seront évidemment les *polynomes* en η, de degrés $3i$ de plus en plus élevés ou à variations de plus en plus rapides, auxquels la série (36) se trouvera ainsi réduite.

L'intégrale générale, formée par la somme de toutes les solutions simples, après leur multiplication par des constantes arbitraires, constituera bien une série infinie en $\eta^0, \eta^3, \eta^6, \ldots$ (à part le facteur η^2). Mais elle vérifiera néanmoins la condition spéciale à la limite $\eta = 1$, car les termes d'un degré très élevé n'y proviendront que des solutions simples d'un ordre très élevé aussi; et, vu la convergence de l'intégrale obtenue, du moins dans le cas d'un état initial *continu* en η, elles n'y figureront qu'avec des constantes arbitraires ou coefficients d'importance extrêmement faible, s'évanouissant à la limite.

27. L'hypothèse $f(0) = 0$, ou $i = 0$, redonne d'abord la solution simple fondamentale

$$\beta = 2, \qquad U = 1 \qquad \text{et} \qquad V = \eta^2.$$

Il faudra donc faire $i = 1$, pour avoir la solution simple suivante, celle où la valeur de β est désignée par β' et qui fournira l'expression asymptotique des petits écarts. L'on obtient

$$(47) \qquad \beta' = 15, \qquad U = 1 - \frac{13}{10}\eta^3;$$

---

est convergente. Ces rapports seront donc tous comparables, sinon presque égaux, au premier d'entre eux; et, pourvu que celui-ci ne soit pas nul, les deux séries se trouveront bien du même ordre de grandeur.

et la fonction correspondante $V = \eta^2 U$ présente un changement de signe unique entre les deux limites $\eta = 0$, $\eta = 1$.

Il en résulte, pour l'expression asymptotique $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ des petits écarts, vu la proportionnalité de ζ à η et en appelant c' une constante arbitraire, la formule

$$(48) \qquad \frac{\varepsilon}{\zeta} = (\text{sensiblement}) \frac{c'\eta}{(1+\alpha t)^{15}}\left(1 - \frac{13}{10}\eta^3\right).$$

Comparés, en un point quelconque de la nappe, à la *partie régularisée* $\frac{h_0}{1+\alpha t}$ de l'ordonnée h, les petits écarts s'évanouissent donc comme sa *quinzième puissance* et, par conséquent, très vite, quand le temps t grandit.

28. Avant d'avoir intégré, ainsi qu'on vient de voir, dans le cas d'une nappe cylindrique ou de certaines nappes de révolution, le système (26), (27), j'avais pu obtenir de la manière suivante, pour la racine β', deux *estimations* qui n'étaient pas très inexactes. *Assimilant ζ à une constante*, dans (26), et me bornant au cas d'une nappe cylindrique où la coordonnée y n'a pas à figurer, j'avais considéré l'équation indéfinie (26), où μ et K sont supposés constants, sous les deux formes

$$(49) \qquad \frac{\mu}{\zeta}\frac{d\varepsilon}{d\theta} = K\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}, \qquad \mu\frac{d\varepsilon}{d\theta} = K\zeta\frac{d^2\varepsilon}{dx^2},$$

qui en font l'équation indéfinie du refroidissement de deux barres ayant, l'une, la conductibilité K et la capacité calorifique $\mu_1 = \frac{\mu}{\zeta} = \frac{\alpha}{M}\frac{\mu}{\eta}$, l'autre, la conductibilité $K_1 = K\zeta = K\frac{M}{\alpha}\eta$ et la capacité calorifique μ. Et j'avais admis qu'on pût, quant à la rapidité d'extinction des diverses solutions simples, assimiler deux barres où soit μ_1, soit K_1 seraient fonction de x dans cette équation, au cas où leur valeur respective se réduirait à sa moyenne d'un bout à l'autre.

On est ainsi ramené au problème du refroidissement d'une barre homogène de longueur L, ayant une extrémité, $x = 0$, à la température zéro, et l'autre extrémité, $x = L$, imperméable à la chaleur.

hypothèses donnant, pour former les solutions simples $e^{-\beta(\theta-\theta_0)}V$, les formules

$$(50)\quad V = \pm \sin\frac{(2i+1)\pi x}{2L}, \quad \beta = \text{soit } \frac{(2i+1)^2\pi^2}{4L^2}\frac{K}{\mu_1}, \quad \text{soit } \frac{(2i+1)^2\pi^2}{4L^2}\frac{K_1}{\mu}.$$

Les valeurs moyennes de μ_1 et de K_1 s'y écrivent d'ailleurs $\frac{\alpha\mu}{M}\int_0^1 \frac{d\xi}{\eta}$ et $K\frac{M}{\alpha}\int_0^1 \eta\, d\xi$; ce qui, vu la valeur (11) de α (n° **16**), conduit à poser

$$(51)\qquad \beta = \text{soit } \frac{(2i+1)^2\pi^2}{6c^2\int_0^1 \frac{d\xi}{\eta}}, \qquad \text{soit } \frac{(2i+1)^2\pi^2}{6c^2}\int_0^1 \eta\, d\xi.$$

Or, les deux valeurs moyennes de η et de son inverse se calculent sans difficulté.

Nous connaissons déjà implicitement, par la formule (22), la première, quotient de l'aire A par le rectangle LM, et qui est $\frac{2}{3c}$.

Quant à la valeur moyenne de $\frac{1}{\eta}$, l'équation (14), différentiée, donne, en posant finalement $\eta = \gamma^{\frac{1}{3}}$,

$$(52)\quad c\int_0^1 \frac{d\xi}{\eta} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^3}} = \frac{1}{3}\int_0^1 \gamma^{\frac{1}{3}-1}(1-\gamma)^{\frac{1}{2}-1}d\gamma = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{6})}.$$

D'ailleurs, d'après (15), c a, de même, pour valeur

$$\frac{1}{3}\int_0^1 \gamma^{\frac{2}{3}-1}(1-\gamma)^{\frac{1}{2}-1}d\gamma \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right);$$

de sorte qu'il vient

$$(53)\qquad c = \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{6})} = 2\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{6})}.$$

Et la multiplication des deux formules (52), (53) donne, en appliquant trois fois la relation d'Euler $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$,

$$(54)\qquad c^2\int_0^1 \frac{d\xi}{\eta} = \frac{2\pi}{3}\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

Faisons en outre, puisqu'il s'agit de la *seconde* racine β, $i = 1$, et les formules (51) nous conduiront, pour β', aux deux estimations ou *appréciations de sentiment*

$$(55) \qquad \beta' = \text{soit } \frac{9\pi\sqrt{3}}{4} = 12,243, \qquad \text{soit } \frac{\pi^2}{c^3} = 15,389.$$

On voit qu'elles comprennent entre elles la valeur exacte 15, dont la seconde surtout, 15,389, ne s'écarte pas beaucoup.

§ VIII. — Extension du mode d'écoulement qui se conserve à certains cas de fonds courbes, concaves ou convexes, à pentes relativement fortes.

29. Il est intéressant de chercher s'il existe pour la base de la nappe aqueuse, c'est-à-dire pour le sous-sol imperméable, des formes courbes rendant possible, comme le fait sa forme plane horizontale, un mode d'écoulement *qui se conserve*, où l'ordonnée h de la surface libre soit le produit d'une fonction h_0 des deux coordonnées horizontales x et y par une fonction T du temps t seul. Nous désignerons celui-ci par τ, en le comptant alors comme aux nos **16** et **17**, pour simplifier les formules, à partir d'une origine (toujours antérieure au début du phénomène) où la fonction T soit analytiquement infinie; et aussi, comme aux mêmes numéros, la fonction h_0 sera appelée ζ, quand nous l'aurons divisée par le facteur constant rendant son équation caractéristique le plus simple possible.

Substituons donc ζT à h dans la relation indéfinie (2) du problème (n° **7**), puis divisons les résultats soit par $\mu\zeta T^2$, soit par $\mu\zeta T$. Il viendra

$$(56) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\frac{d\frac{1}{T}}{d\tau} &= \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(KH\frac{d\zeta}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(KH\frac{d\zeta}{dy}\right)\right]\frac{1}{T} \\ &\quad + \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(K\zeta\frac{d\zeta}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\zeta\frac{d\zeta}{dy}\right)\right]. \\ \frac{d\log T}{d\tau} &= \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(KH\frac{d\zeta}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(KH\frac{d\zeta}{dy}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(K\zeta\frac{d\zeta}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\zeta\frac{d\zeta}{dy}\right)\right]T. \end{aligned} \right.$$

Or, une différentiation en τ de ces deux équations isole l'une de l'autre les deux expressions

$$(57)\quad \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{KH}\frac{d\zeta}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{KH}\frac{d\zeta}{dy}\right)\right],\quad \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\zeta\frac{d\zeta}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\zeta\frac{d\zeta}{dy}\right)\right]$$

et les montre, séparément, fonctions de τ *seul*. Comme elles en sont effectivement indépendantes, elles ne pourront que se réduire à deux constantes, dont $-\alpha$ désignera provisoirement la seconde et $-k\alpha$ la première.

Mais α se réduit à 1 si l'on divise partout, dans la seconde expression (57), ζ par α, ou si l'on appelle $\zeta\alpha$ ce qu'on appelait ζ, afin d'extraire un facteur α de l'expression tout entière. Et alors, les conditions qui détermineront ζ concorderont exactement avec les relations (18) (n° **17**); de sorte que ζ sera la fonction de x et de y étudiée plus haut sous ce nom, fonction essentiellement positive dans les cas où nous l'avons calculée.

Cela posé, k sera le rapport constant de la première des expressions (57) à la seconde; et l'on aura

$$(58)\qquad \frac{d}{dx}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}-k\zeta)\frac{d\zeta}{dx}\right]+\frac{d}{dy}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}-k\zeta)\frac{d\zeta}{dy}\right]=0.$$

Or, combinée avec les conditions $\left(\zeta \text{ ou } \frac{d\zeta}{dn}\right)=0$ sur le contour, cette équation revient à annuler partout soit la pente (proportionnelle à $\Delta_1\zeta$) de la surface libre, soit la différence $\mathrm{H}-k\zeta$, dans les deux cas, que nous considérons surtout, de nappes ou cylindriques à génératrices horizontales, ou de révolution autour de l'axe vertical des z.

En effet, dans le premier cas, où μ, K, H et ζ peuvent être censés indépendants de y, l'équation (58) revient à poser

$$\mathrm{K}(\mathrm{H}-k\zeta)\frac{d\zeta}{dx}=\text{const.},\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad \mathrm{K}(\mathrm{H}-k\zeta)\frac{d\zeta}{dx}=0,$$

vu qu'il y aura toujours, ou sur un bord de la surface libre, s'il existe un contour-paroi, ou dans l'intérieur, si tout le contour est libre, c'est-à-dire constitué par le seuil horizontal des sources supposées, un plan tangent *horizontal* où s'annulera l'inclinaison $\frac{d\zeta}{dx}$. Et l'on aura par-

tout soit $\frac{d\zeta}{dx} = 0$, c'est-à-dire une nappe sans pente superficielle *ni écoulement*, soit $H - k\zeta = 0$, c'est-à-dire $H = k\zeta$. Donc, si c'est un mode d'*écoulement* se conservant qui se réalise (ce qui seul nous intéresse ici), l'ordonnée H du fond sera, sur toutes les verticales, proportionnelle à la fonction ζ, parfaitement déterminée, de x.

Dans le cas, un peu moins simple, d'une nappe de révolution autour de l'axe des z, cas où μ, K, H, ζ ne dépendent de x et de y que par l'intermédiaire de la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ à l'axe, la substitution de $\frac{d\zeta}{dr}\frac{(x, y)}{r}$ à $\frac{d\zeta}{d(x, y)}$ donnera aisément à la relation (58) la forme

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rK(H - k\zeta)\frac{d\zeta}{dr}\right] = 0; \qquad \text{d'où} \qquad rK(H - k\zeta)\frac{d\zeta}{dr} = \text{const.};$$

et le fait de l'existence d'un plan tangent horizontal où s'évanouit la dérivée $\frac{d\zeta}{dr}$, dans toutes les nappes que nous considérons, obligera d'annuler encore la constante ou, par suite, soit la pente $\frac{d\zeta}{dr}$ de la surface libre, avec l'écoulement lui-même, soit l'expression $H - k\zeta$. Donc, l'hypothèse d'un mode d'écoulement se conservant exige l'égalité de H à $k\zeta$, c'est-à-dire, encore, la proportionnalité de l'ordonnée H du fond à celle, h, de la surface libre.

D'ailleurs, lorsque le coefficient k de cette proportionnalité de H à ζ sera positif, le fond se trouvera concave, puisque les ordonnées H du fond se comptent de haut en bas à partir du plan des xy, contrairement aux ordonnées h de la surface libre. Quand ce coefficient k sera négatif, le fond sera, au contraire, convexe ou en relief; et la profondeur d'eau $H + h$, ou mieux alors $h + H$, sera l'excédent de h sur la valeur absolue de H.

30. En général, pour un contour donné quelconque de la nappe, et la fonction correspondante ζ de x et de y étant censée obtenue, attribuons à la profondeur H, positive ou négative, existant sous le plan horizontal du seuil de la source, la formule

$$H = k\zeta + H_1. \tag{59}$$

L'équation (58), la seule à laquelle soit astreinte ici H (à part la condition admise de donner partout, dans l'intérieur du contour, à quelque distance du bord, des pentes de fond $\Delta_1 H$ modérées), deviendra, en H_1,

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\zeta}{dx}\cdot H_1\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{d\zeta}{dy}\cdot H_1\right)=0.$$

Or cette relation exprime l'intégrabilité de la différentielle totale

$$(60)\qquad d\Phi = H_1 K\left(\frac{d\zeta}{dx}dy-\frac{d\zeta}{dy}dx\right),$$

qui, égalée à zéro, fournirait l'équation différentielle des *lignes de plus grande pente de la surface libre* $z = T\zeta$. Si donc $\varphi = \text{const.}$ est l'équation finie, censée obtenue, de ces *lignes de pente,* vues en projection sur le plan des xy et invariables, par hypothèse, durant tout l'écoulement, la fonction Φ sera une fonction arbitraire de φ ou pourra s'écrire $\Phi(\varphi)$; et l'on aura

$$-H_1 K\frac{d\zeta}{dy}=\frac{d\Phi(\varphi)}{dx}=\Phi'(\varphi)\frac{d\varphi}{dx},\qquad H_1 K\frac{d\zeta}{dx}=\Phi'(\varphi)\frac{d\varphi}{dy}.$$

Il en résulte

$$(61)\qquad H_1=\frac{\Phi'(\varphi)}{K}\left(\frac{-\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\zeta}{dy}}\text{ ou }\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\zeta}{dx}}\right).$$

Ces deux expressions, élevées au carré et puis combinées par l'addition, terme à terme, de deux rapports égaux, donnent enfin, par une extraction de racines carrées, la formule plus symétrique

$$(61\ bis)\qquad H_1=\frac{\pm\Phi'(\varphi)}{K}\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\zeta}.$$

Supposons, par exemple, la surface libre, de révolution autour de l'axe des z. On aura, comme lignes de niveau $\zeta = \text{const.}$, les cercles parallèles $r=\sqrt{x^2+y^2}=\text{const.}$, et, comme lignes de pente $\varphi = \text{const.}$,

en projection sur le plan des xy, les rayons r eux-mêmes, distingués les uns des autres par leur azimut θ, ou ayant comme équation $\theta = \text{const.}$, c'est-à-dire arc tang $\frac{y}{x} = \text{const.}$ Ainsi, d'une part, K, ζ seront fonctions de r, et $\frac{d\zeta}{d(x, y)}$ vaudront $\frac{d\zeta}{\partial r}\frac{(x, y)}{r}$ ou $\frac{d\zeta}{dr}(\cos\theta, \sin\theta)$; mais, d'autre part, φ sera arc tang $\frac{y}{x}$ et $\frac{d\varphi}{d(x, y)}$ s'écriront $-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}$, ou $-\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\cos\theta}{r}$. Les formules (61) deviendront donc

$$(62) \qquad H_1 = \frac{\Phi'(\theta)}{Kr\frac{d\zeta}{dr}}.$$

Elles donnent, en résumé, pour H_1, le quotient d'une fonction de θ généralement arbitraire (à cela près qu'elle admet effectivement la période 2π) par la fonction, $\pm Kr(\Delta_1\zeta)$, de la distance r à l'axe. Mais cet excédent, H_1, de la profondeur H, sur sa partie $k\zeta$ proportionnelle aux dénivellations $T\zeta$, s'annule quand la surface libre a un plan tangent horizontal $\left(\text{où est réduite à zéro la dérivée } \frac{d\zeta}{dr}\right)$; car, si l'on ne posait pas alors $\Phi'(\theta) = 0$, la profondeur $k\zeta + H_1$ serait infinie, par sa partie H_1, sous le point de contact de ce plan tangent horizontal.

Le même fait de l'annulation de H_1 se produira dans le cas général de la formule (61 *bis*), si la surface libre possède un *sommet* où aboutissent toutes les lignes de pente et où le plan tangent soit horizontal. Car, alors, $\Delta_1\zeta$ s'y annulant et φ y recevant néanmoins toutes ses valeurs, le paramètre différentiel $\Delta_1\varphi$ s'y trouve infini. On devra donc avoir identiquement $\Phi'(\varphi) = 0$, pour que la partie H_1 de la profondeur reste finie, sous le sommet, comme l'autre partie $k\zeta$.

La fonction $\Phi'(\varphi)$ serait encore nulle, ce qui entraînerait l'annulation de H_1, si un plan horizontal était tangent à la surface libre *tout le long d'une courbe de contact* où aboutiraient les lignes de pente; car dans (61 *bis*), $\Delta_1\zeta$, mais non $\Delta_1\varphi$, s'y annulerait d'une manière continue.

On ne voit donc guère dans quelles circonstances pourrait subsister la partie H_1, non proportionnelle à ζ, de la profondeur H.

51. Déterminons maintenant la fonction T, du temps τ, entrant dans l'expression $h = \zeta T$ des dénivellations de toute nappe dont le mode d'écoulement se conserve. Les conditions au contour se trouvant satisfaites à raison des seconde et troisième relations (18), il suffira de vérifier l'équation indéfinie (2), qui nous a donné les deux (56). Or, grâce à l'égalité respective des deux expressions (57) à $-k$ et à -1, ces deux relations (56), devenues identiques, prennent la forme

$$(63)\qquad T' = -T(k+T), \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{k}\right) = k\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{k}\right).$$

Intégrée de manière à rendre T infini ou $\frac{1}{T}$ nul (comme il est convenu) pour $\tau = 0$, cette équation donne

$$(64)\qquad \frac{1}{T}+\frac{1}{k} = \frac{1}{k}e^{k\tau}, \qquad \text{ou} \qquad T = \frac{ke^{-k\tau}}{1-e^{-k\tau}} = \frac{1}{\tau}\,\frac{\frac{k\tau}{2}\,e^{-\frac{k\tau}{2}}}{\sin\frac{k\tau}{2}}.$$

L'exponentielle $e^{-k\tau}$ devant figurer sans cesse dans les formules suivantes, il y aura lieu de la représenter par une seule lettre et même, souvent, de la prendre, au lieu de τ, comme variable indépendante. Elle sera désignée par ψ. Nous aurons donc

$$(65)\qquad \left\{\begin{array}{l} \psi = e^{-k\tau}; \quad \text{d'où} \quad T = \dfrac{k\psi}{1-\psi}, \quad k+T = \dfrac{k}{1-\psi} \\ \text{et, aussi,} \\ \qquad\qquad \dfrac{d}{d\tau} = -k\psi\,\dfrac{d}{d\psi}. \end{array}\right.$$

Les fonctions T, $k+T$ seront essentiellement positives, car k et $1-\psi$ changeront ensemble de signe. Par suite, la dérivée T', égale à $-T(k+T)$, sera négative; et T, $k+T$ décroîtront sans cesse, à partir de l'infini qui est leur valeur pour $\tau = 0$, en tendant respectivement vers les expressions asymptotiques $ke^{-k\tau}$, k, si k est positif, $(-k)$, $(-k)e^{k\tau}$ si k est négatif. On voit que, pour les petites valeurs du temps τ, alors que ψ est réductible à $1-k\tau$, les fonctions T, $k+T$ se confondent sensiblement avec l'inverse de τ, comme cela devait être, d'après la formule (19) (n° **17**), au début de l'écoulement, où les

courbures de la surface libre sont incomparablement plus accusées que celles du fond. L'écoulement s'y fait donc, à très peu près, comme il se ferait toujours si le fond était plat ou si, k devenant infiniment petit, l'on avait, à toute époque,

$$1 - \psi = k\tau \qquad \text{et} \qquad T = \frac{1}{\tau}.$$

32. Le débit $K(H+h)\frac{dh}{dn}$, par unité de longueur, d'une coupe verticale faite idéalement dans le sol perméable, sera

$$KH\frac{d\zeta}{dn}T + K\zeta\frac{d\zeta}{dn}T^2.$$

Si l'on a partout $H = k\zeta$, comme il arrive au moins dans les cas simples, cette expression deviendra

$$\left(K\zeta\frac{d\zeta}{dn}\right)(k+T)T.$$

ou variera, avec le temps τ, comme le produit $T(k+T)$, égal à la valeur absolue de la dérivée T'. Le débit de la source sera donc, aussi, proportionnel à $T(k+T)$, c'est-à-dire à l'expression

$$(66) \qquad \frac{k^2\psi}{(1-\psi)^2} = \frac{k^2 e^{-k\tau}}{(1-e^{-k\tau})^2} = \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\frac{k\tau}{2}}{\operatorname{sih}\frac{k\tau}{2}}\right)^2.$$

Dans les cas, plus compliqués, où la formule (61) rendrait possible un certain excédent H_1 de H sur $k\zeta$, l'équation (58), multipliée par $d\sigma$ et intégrée à la manière ordinaire sur toute l'aire σ de la nappe (vue en plan), donnerait néanmoins, en tenant compte de la condition $\frac{d\zeta}{dn} = 0$ sur le contour-paroi χ_1,

$$(67) \qquad \int_\chi KH\frac{d\zeta}{dn}\,d\chi = k\int_\chi K\zeta\frac{d\zeta}{dn}\,d\chi.$$

Et alors le débit Q de la source, qui est successivement, en ne négli-

geant pas, dès l'abord, h près du seuil,

$$Q = \int_\chi K(H+h)\frac{dh}{dn}\,d\chi = T\int_\chi KH\frac{d\zeta}{dn}\,d\chi + T^2\int_\chi K\zeta\frac{d\zeta}{dn}\,d\chi,$$

deviendrait, par la substitution du second membre de (67) au premier membre, et, vu enfin la dernière expression (66) du produit $T(k+T)$,

$$(68)\quad Q = \left(\int_\chi K\zeta\frac{d\zeta}{dn}\,d\chi\right)T(k+T) = \left(\int_\chi K\zeta\frac{d\zeta}{dn}\,d\chi\right)\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\frac{k\tau}{2}}{\operatorname{sih}\frac{k\tau}{2}}\right)^2.$$

Deux conséquences importantes résultent de cette formule.

La première consiste en ce que, le débit Q étant fini, alors que la dénivellation $T\zeta$, et, par suite, ζ tendent vers zéro à l'approche du seuil, la pente de superficie, proportionnelle à $\frac{d\zeta}{dn}$, devra, en compensation, y croître sans limite et ne pourra pas y garder les valeurs modérées qu'elle a dans l'intérieur. C'est le produit $2\zeta\frac{d\zeta}{dn}$, ou $\frac{d.\zeta^2}{dn}$, qui restera fini; de sorte que ζ^2 sera, près du seuil, de l'ordre de la distance au seuil, ou, ζ, comparable à la racine carrée de cette distance, comme il arrivait en effet (n° **16**) dans le profil (14) de surface libre que nous avons déterminé.

Le premier membre de la formule (67) montre alors que la profondeur H devra (même dans sa partie H_1 non proportionnelle à ζ) tendre vers zéro à l'approche du seuil, ou y devenir comparable à l'inverse de la dérivée grandissante $\frac{d\zeta}{dn}$.

La deuxième conséquence est relative à la fonction du temps entrant dans l'expression de Q, $\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\frac{k\tau}{2}}{\operatorname{sih}\frac{k\tau}{2}}\right)^2$, *fonction dont l'inverse est le produit du carré du temps τ par le carré du rapport du sinus hyperbolique de l'argument $\frac{k\tau}{2}$ à cet argument lui-même. Quand le temps τ grandit, le débit de la source décroît sans cesse*, par chacun des deux facteurs de cette fonction; et, *pour une même valeur du*

temps τ, *il décroît aussi*, par le second facteur, celui où figure le coefficient k de concavité, *quand le sous-sol devient plus courbe* ou qu'on fait grandir k en valeur absolue (*abstraction faite*, bien entendu, *de la partie* H_1 *de la profondeur*, partie sans influence sur Q dans le mode d'écoulement qui se conserve). Ce débit est, d'ailleurs, le même, que le fond soit convexe ou concave, pourvu que ses courbures, *proportionnelles à* k, soient pareilles dans les deux cas.

Toutefois, pour que ces lois s'appliquent effectivement, quelque grand que devienne le temps τ, il est nécessaire que, même pour τ infini, la profondeur $H + h$, ou $k\zeta + H_1 + h$, ne soit nulle part négative. Il faut donc, si k est positif, ou si h tend vers zéro, que la partie H_1 de la profondeur ne s'abaisse nulle part au-dessous de $-k\zeta$; et si k est négatif, ou si h tend vers $-k\zeta$, que cette même partie H_1 ne devienne nulle part négative.

La fonction T et, par suite, l'altitude $h = \zeta T$ de la surface libre, considérées à une même époque τ, mais pour deux valeurs de k égales et contraires, l'une, k', positive, l'autre, $-k$, négative, sont entre elles, d'après la dernière formule (64), comme $e^{-k'\tau}$ est à 1, ou, par conséquent, plus fortes pour k négatif que pour k positif. Ainsi, quand les débits ont mêmes valeurs, la surface libre se trouve plus élevée au-dessus d'un fond convexe qu'au-dessus d'un fond concave : les pentes de superficie et les vitesses d'écoulement y sont donc plus grandes, en compensation de profondeurs d'eau $h + H$ moindres (de $k'\zeta$), donnant lieu à des sections d'écoulement plus réduites.

§ IX. — Stabilité, dans ces cas, du régime obtenu, prouvée par un procédé d'intégration nouveau en Physique mathématique.

33. Mais pour savoir si la forme $h = \zeta T$ est encore stable, il faut étudier les expressions, qui en sont voisines, de la fonction h de x, y et τ. Pour la raison donnée déjà au n° **20**, nous écrirons ces expressions non pas $\zeta T + \varepsilon$, mais bien

$$(69) \qquad h = \zeta T + \zeta \psi \varepsilon - \frac{k\zeta\psi}{1-\psi} + \zeta \psi \varepsilon,$$

avec ε fonction de x, y et τ donnée initialement *très petite*. En outre,

pour éviter une complication paraissant excessive, nous supposerons $H_1 = 0$, ou les ordonnées H du fond réduites au terme relativement simple $k\zeta$, que nous savons les exprimer en entier tout au moins dans les cas les plus intéressants. Il viendra

$$(H + h)\frac{dh}{d(x, y)} = \frac{k^2\psi}{(1-\psi)^2}\zeta\frac{d\zeta}{d(x, y)} + \frac{k\zeta^{1-\psi}}{1-\psi}\frac{d\varepsilon}{d(x, y)}.$$

Alors les relations (2) et (3) (nos **7** et **8**), débarrassées des termes où ne figure pas ε, deviennent, grâce, d'ailleurs, à la dernière formule (65),

$$(70)\quad \left\{\begin{array}{l} -\mu\psi(1-\psi)\dfrac{d.\zeta^{-\psi}\varepsilon}{d\psi} = \dfrac{d}{dx}\left(K\zeta^{1-\psi}\dfrac{d\varepsilon}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(K\zeta^{1-\psi}\dfrac{d\varepsilon}{dy}\right), \\ \qquad\qquad (\text{au contour})\quad \left(\varepsilon \text{ ou } \dfrac{d\varepsilon}{dn}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Comme l'expression $-\psi\frac{d.\zeta^{-\psi}\varepsilon}{d\psi}$, ou $\frac{1}{k}\frac{d.\zeta^{-\psi}\varepsilon}{d\tau}$, se dédoublerait en $\frac{\zeta^{-\psi}}{k}\frac{d\varepsilon}{d\tau}$ et $\frac{1}{k}\frac{d.\zeta^{-\psi}}{d\tau}\varepsilon$, ces équations sont celles du refroidissement d'une plaque à faces rayonnantes, dont la conductibilité *intérieure*, $K\zeta^{1-\psi}$, la capacité calorifique, $\frac{\mu}{k}(1-\psi)\zeta^{-\psi}$, et la conductibilité *extérieure*, $\frac{\mu}{k}(1-\psi)\frac{d.\zeta^{-\psi}}{d\tau}$, *varieraient* avec ψ, c'est-à-dire *avec le temps* τ.

On remarquera que le coefficient k de concavité du sous-sol est absent du système (70). Donc, dans les nappes de même contour, à fond soit concave chez toutes, soit convexe chez toutes, les valeurs de ε qui se produiront, pour des valeurs quelconques de ψ ou du produit $k\tau$, à la suite de valeurs ε_0 initiales communes, correspondant à une même valeur ψ_0 de ψ, seront indépendantes des ordonnées $H = k\zeta$ du fond. Seulement, elles se succéderont d'autant plus lentement que la valeur absolue de k sera plus petite, ou que τ devra plus varier pour faire éprouver au produit $k\tau$ et, par suite, à $\psi = e^{-k\tau}$, un changement donné.

Lorsque la valeur absolue de k est soit très petite, soit très grande, le produit $k\tau$, pour tous les temps τ finis, est lui-même ou très petit, ou très grand. Dans le premier cas, la variable ψ reste constamment

voisine de l'unité, tandis que, dans le second, elle reste ou voisine de zéro, si k est positif, ou très grande, si k est négatif. Cette variable ψ n'est donc alors à considérer que dans certaines régions du champ total de ses variations, régions fort restreintes même, du moins pour k ou voisin de zéro, ou très grand. Voilà justement pourquoi les deux cas d'un sous-sol sans courbure (§ VII) et d'un sous-sol fortement concave, où h se trouve négligeable devant H (§ III), ont été relativement faciles à traiter. Nous verrons (au n° **43**) qu'il s'y joint le troisième cas, d'un sous-sol fortement convexe.

34. La solution particulière la plus simple des équations (70) s'obtient en prenant la différence de deux formes voisines persistantes de h, savoir ζT et $\zeta(T + \delta T)$, où l'on ferait, dans la variable τ de T, $\tau = \tau_0 + t$, et où le paramètre τ_0 éprouverait l'accroissement élémentaire $\delta\tau_0$ au passage d'une forme à l'autre; ce qui revient à choisir, comme expression de $\zeta^{-\psi}\varepsilon$, le produit de ζ par la dérivée de T en τ_0, identique à T' ou à $-T(k + T)$. Il vient ainsi, à un facteur constant près, si ε_1 désigne cette solution particulière, *de signe invariable*, ou, par conséquent, analogue à la solution *fondamentale* d'un problème ordinaire de refroidissement :

$$(71) \qquad \varepsilon_1 = \frac{\psi\zeta^{1+\psi}}{(1-\psi)^2}.$$

Et, en effet, la substitution de cette valeur dans les relations (70), devenues

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mu\psi(1-\psi)\dfrac{d.\zeta^{-\psi}\varepsilon_1}{d\psi} = \dfrac{d}{dx}\left(K\zeta^{1-\psi}\dfrac{d\varepsilon_1}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(K\zeta^{1-\psi}\dfrac{d\varepsilon_1}{dy}\right), \\ \qquad\qquad (\text{au contour}) \quad \left(\varepsilon_1 \text{ ou } \dfrac{d\varepsilon_1}{dn}\right) = 0, \end{array} \right.$$

les réduit identiquement à celles, (18), qui déterminent (n° **17**) la fonction ζ de x et de y.

35. Cela posé, multiplions par ε l'équation indéfinie (72) et retranchons les résultats, *membre à membre*, du produit, par ε_1, de l'équation indéfinie (70). Il viendra, en appelant u le quotient de ε

par ε_1, ou posant

$$(73) \qquad \varepsilon = \frac{\psi\zeta^{1+\psi}u}{(1-\psi)^2},$$

l'équation indéfinie qui régit u :

$$(74) \quad -\mu\psi(1-\psi)\zeta^{2+\psi}\frac{du}{d\psi} = \frac{d}{dx}\left(K\zeta^{3+\psi}\frac{du}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\zeta^{3+\psi}\frac{du}{dy}\right).$$

Bornons-nous, comme plus haut (n° **24**), au cas de nappes soit cylindriques, soit de révolution, où u varie seulement avec ζ et τ. Alors les produits $K\zeta^{3+\psi}\frac{du}{d(x,y)}$ deviennent $\left(K\zeta\frac{d\zeta}{d(x,y)}\right)\left(\zeta^{2+\psi}\frac{du}{d\zeta}\right)$; et la relation (74), divisée finalement par $\mu\zeta$, prend, vu (toujours) l'équation indéfinie (18) en ζ, la forme

$$(75) \quad -\psi(1-\psi)\zeta^{1+\psi}\frac{du}{d\psi} = \frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^{2+\psi}\frac{du}{d\zeta}\right) - \left(\zeta^{2+\psi}\frac{du}{d\zeta}\right).$$

36. Or, avec une nappe soit cylindrique, à coefficients K, μ constants, soit de révolution, mais vérifiant la relation $\mu K r^2 = \text{const.}$, ζ pourra, comme on a vu au n° **24**, à la formule (33 *bis*), être remplacé par une variable proportionnelle, η, croissante de zéro à 1, et $\frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2$, être remplacé de même par $\frac{2}{3}\frac{1-\eta^3}{\eta^2}$. L'équation indéfinie en u (75), traitée comme l'a été (33), dans le n° **24**, pour donner (34), sera donc

$$(76) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2}{\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{2+\psi}\frac{du}{d\eta}\right) \\ &\quad = 2\eta\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{2+\psi}\frac{du}{d\eta}\right) + 3\left(\eta^{2+\psi}\frac{du}{d\eta}\right) - 3\psi(1-\psi)\eta^{1+\psi}\frac{du}{d\psi}. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas extrême d'un fond plat, où k est infiniment petit et où ψ, égal à $1-k\tau$, reste à toute époque τ infiniment voisin de 1, le dernier terme de (76) devient $3\eta^2\tau\frac{du}{d\tau}$ ou $3\eta^2\frac{du}{d\theta}$; et k, ψ s'éliminent à la fois de cette équation. Alors elle rentre dans celle du refroidissement de corps ayant leurs propriétés indépendantes du temps; et elle admet par conséquent les solutions simples, familières aux géomètres,

formées en multipliant des fonctions du temps par des fonctions de η. Comme ces solutions se sont trouvées, au n° **25**, développables en deux séries distinctes, suivant des puissances ascendantes de η, et que, par suite, leur ensemble, c'est-à-dire l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles, s'est aussi développé de même, il y a lieu d'essayer si, avec ψ maintenant quelconque, l'intégrale analogue, ou générale, de (76), ne serait pas encore développable, *par rapport à* η, en deux séries procédant suivant des suites ascendantes de ses puissances. Les calculs seront d'ailleurs faciles; car l'extrême ressemblance, quant à la variable η, des deux équations (34) et (76), montre qu'elles présentent, tant dans leurs premiers membres, comparés l'un à l'autre, que dans les seconds, comparés aussi, les mêmes genres respectifs d'homogénéité.

Cherchons donc à composer l'intégrale générale de (76) au moyen de deux séries de la forme

$$(77) \qquad u = A\eta^{\alpha} + B\eta^{\alpha+3} + C\eta^{\alpha+6} + D\eta^{\alpha+9} + \ldots,$$

mais avec coefficients A, B, C, D, ..., fonctions de ψ. Nous poserons, au lieu de (35),

$$(78) \quad \varphi(\lambda, \psi) = 2\lambda(\lambda + 1 + \psi), \; F(\lambda, \psi) = \lambda(2\lambda + 5 + 2\psi),$$

formules qui, pour $\psi = 1$, se réduisent, l'une, à la première (35), et, l'autre, à la seconde (35), mais privée de son terme, en $\beta - 2$, qui provenait du dernier terme de (34) non pareil à celui de (76). Alors la substitution de la série (77) dans (76) conduira, par l'identification des termes semblables en η dans les deux membres, d'abord, à prendre

$$(79) \quad \varphi(\alpha, \psi) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \alpha = \text{soit zéro}, \qquad \text{soit } -1 - \psi,$$

et, ensuite, à établir entre les fonctions A, B, C, D, ..., de ψ, le système d'équations différentielles linéaires

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\alpha + 3, \psi)B = F(\alpha, \psi)\,A - 3\psi(1 - \psi)A', \\ \varphi(\alpha + 6, \psi)C = F(\alpha + 3, \psi)B - 3\psi(1 - \psi)B', \\ \varphi(\alpha + 9, \psi)D = F(\alpha + 6, \psi)C - 3\psi(1 - \psi)C', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

comportant tout autant de constantes arbitraires qu'il y a de fonctions A, B, C, D, ..., savoir, leurs valeurs initiales, relatives à une valeur de τ ou de ψ donnée.

Nous obtenons donc les *deux* séries prévues, aptes, ce semble, à constituer, par leur somme, l'intégrale générale de l'équation (76), du *second* ordre en η.

37. Mais cette intégrale générale se trouve astreinte, ici, à vérifier la condition propre à chacune des deux limites $\eta = 0$, $\eta = 1$. Or la condition, $\varepsilon = 0$, relative à la première limite, oblige à y annuler le produit $u\zeta^{1+\psi}$, ou, encore, le produit $u\eta^{1+\psi}$, qui s'y réduit en tout au coefficient A de la seconde série, celle où $\alpha = -1 - \psi$. Donc on aura, dans cette série, d'abord $A = 0$, puis, en vertu de (80), $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, ... Et il ne subsistera, pour exprimer u, que la première série, où $\alpha = 0$.

L'on aura ainsi pour u une valeur de la forme

$$(81)\quad u = A + B\eta^3 + C\eta^6 + \ldots + G\eta^{3i-3} + I\eta^{3i} + J\eta^{3i+3} + \ldots,$$

avec A, B, C, ..., G, H, I, ..., fonctions de ψ régies, d'après (80) et (78), par les équations différentielles

$$(82)\quad \left\{\begin{array}{l} 2(4+\psi)B = \qquad\qquad -\psi(1-\psi)A', \\ 4(7+\psi)C = (11+2\psi)B - \psi(1-\psi)B', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 2i(3i+1+\psi)I = (i-1)(6i-1+2\psi)G - \psi(1-\psi)G', \\ 2(i+1)(3i+4+\psi)J = i\qquad(6i+5+2\psi)I - \psi(1-\psi)I', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

38. Il reste à vérifier la condition

$$\Delta_1 \varepsilon = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\varepsilon}{d(x,r)} = \frac{d\varepsilon}{d\eta}\,\frac{d\eta}{d(x,r)} = 0$$

à la seconde limite, $\eta = 1$. Or, la formule (20) (n° **18**) donne, pour la dérivée de η près de cette limite, une quantité comparable à $\sqrt{1-\eta^3}$;

et, d'autre part, $\frac{dz}{d\eta}$ est, vu (73), de l'ordre de $\frac{d}{d\eta}(\eta^{1-\psi}u)$, ou de l'ordre même de grandeur de $\frac{du}{d\eta}$. L'on devra donc avoir

$$(83) \qquad (\text{à la limite } \eta = 1) \qquad \frac{du}{d\eta}\sqrt{1-\eta^3} = 0.$$

Mais le cas particulier, déjà traité (n° **26**), d'une nappe à fond plat où k est infiniment petit, et que nous venons de retrouver ici en étudiant la fonction plus générale u au voisinage de la première valeur, 1, de ψ (valeur qui correspond à $\tau = 0$), montre que la dérivée $\frac{du}{d\eta}$ devient, au moins alors, comparable, près de la limite $\eta = 1$, à l'inverse même de $\sqrt{1-\eta^3}$, *toutes les fois qu'on ne réduit pas la série à un simple polynome, par l'annulation de ses coefficients venant après l'un quelconque d'entre eux,* ou, pour plus d'exactitude, toutes les fois qu'on laisse une importance *assignable* aux termes éloignés, quelque grands que deviennent *leur éloignement, leur degré en* η.

Il faudra donc réduire le système (82) soit à sa première équation, en posant $B = 0$, soit aux deux premières, en posant $C = 0$, soit aux trois premières, en annulant le coefficient suivant D, etc. C'est ainsi que l'on approchera peu à peu, à un degré illimité, de la véritable intégrale, ou intégrale générale, du problème [1].

---

[1] Cela revient évidemment à satisfaire, *en toute rigueur*, aux équations tant indéfinies que définies ou concernant le contour, mais à ne vérifier qu'*imparfaitement à chaque instant du raisonnement*, vu le nombre *limité* de constantes dont on dispose *alors*, la condition relative à l'état initial. C'est seulement *à la limite*, ou grâce à une approximation de plus en plus grande, se réalisant à mesure que le polynome en η adopté pour u s'accroît de termes toujours plus élevés, mais de plus en plus faibles, et approche ainsi d'être une série convergente, que la condition d'état initial se trouve pleinement satisfaite.

Le procédé suivi rentre donc dans le mode d'interpolation, fréquemment employé en Physique mathématique, que j'ai signalé au n° 444* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments*, p. 395*) et dont de beaux exemples, mais d'une autre sorte, ou se rapportant à des questions d'état permanent, dans lesquelles l'interpolation portait justement sur les conditions au contour, avaient été donnés par de Saint-Venant (même Tome, p. 422*).

Dans le premier cas, il vient $A' = 0$ ou $A = u = \text{const.}$, et la formule (73) redonne la solution simple fondamentale (71).

39. Dans le second cas, les deux premières équations (82) deviennent

$$\frac{B'}{B} = \frac{11 + 2\psi}{\psi(1-\psi)}, \qquad A' = -2\frac{4+\psi}{\psi(1-\psi)}B;$$

et elles donnent à un facteur constant près, vu qu'on peut y annuler, pour $\psi = 0$, A en même temps que B, si l'on fait abstraction de la solution *simple* précédente $u = \text{const.}$,

$$(84) \qquad B = -\frac{\psi^{11}}{(1-\psi)^{13}}, \qquad A = 2\int_0^{\psi}\frac{\psi^{10}(4+\psi)\,d\psi}{(1-\psi)^{14}}$$

On voit bien qu'en n'y faisant pas annuler A pour $\psi = 0$, cette fonction A s'accroîtrait d'une constante arbitraire, et le polynome en A et B déduit de (81) comprendrait de plus la solution simple précédente $u = \text{const.}$

Pour les petites valeurs du produit $k\tau$, alors que ψ est à peine différent de 1, les deux coefficients B, A exprimés par (84) sont très grands, de l'ordre de $(1-\psi)^{-13}$; et, par suite, l'expression correspondante (73) de ε l'est, elle-même, de l'ordre de $(1-\psi)^{-15}$, comme l'indiquait implicitement la deuxième racine, $\beta' = 15$, obtenue au n° **27**. Mais, ici où k n'est pas nul et où, si d'abord l'on suppose positif, pour fixer les idées, ce coefficient de concavité du sous-sol, ψ tend vers zéro à mesure que τ grandit, B et A finissent par être sensiblement $-\psi^{11}$ et $\frac{8}{11}\psi^{11}$. On voit donc que la solution simple obtenue pour u, du troisième degré en η, et où les deux coefficients B, A ont signes contraires, donnera une valeur (73) de ε s'évanouissant comme ψ^{12}, alors que la partie régularisée ζT de h sera, d'après la seconde formule (65), $\zeta k\psi$ et décroîtra comme ψ seulement. Ainsi, des écarts $\zeta^{-\psi}\varepsilon$ exprimés, au facteur près $\zeta^{-\psi}$, par cette deuxième solution simple, s'atténueront, du moins dans le cas considéré d'une forme concave du sous-sol, comme le fait la *douzième* puissance de la partie réglée ζT et, par conséquent, incomparablement plus vite qu'elle.

Or cette deuxième solution simple est, nous allons le prouver, bien moins rapide encore à s'évanouir que toutes les suivantes; de sorte que c'est elle qui, comme on pouvait le prévoir, donne la forme *asymptotique* ou la partie principale de petits écarts quelconques $\zeta^{-\psi}\varepsilon$. Donc ceux-ci tendent vite vers zéro *comparativement à la partie réglée;* et la solution régulière ζT se trouve bien stable.

40. Pour la $(i+1)^{\text{ième}}$ solution simple, le dernier coefficient, qui est alors I, du polynome (81), résultera de la condition $J = 0$, c'est-à-dire, d'après (82), de l'équation

$$(85)\qquad \frac{I'}{I} = i\,\frac{6i+5+2\psi}{\psi(1-\psi)}; \qquad \text{d'où} \qquad I = \frac{\psi^{i(6i+5)}}{(1-\psi)^{i(6i+7)}},$$

à un facteur constant près.

Or un calcul assez simple montre que, dans cette solution *spéciale*, c'est-à-dire débarrassée des i premières, que l'on obtiendrait en même temps par l'intégration complète des i équations (82) en G, ..., C, B, A, le coefficient précédant I, savoir G, et, de proche en proche, tous les autres jusqu'à A, sont, aux deux limites $\psi = 1$ et $\psi = 0$, des mêmes ordres, soit de grandeur, soit de petitesse, que I, comme on l'a vu déjà ci-dessus pour A dans les formules (84).

En effet, l'équation en G′ et G, par exemple, est de la forme

$$(86)\qquad G' - \frac{m+n\psi}{\psi(1-\psi)}\,G = -\frac{P+Q\psi}{\psi(1-\psi)}\,I,$$

avec m, n, P, Q constants et positifs. Elle donne, quand on supprime son second membre, G proportionnel à $\frac{\psi^m}{(1-\psi)^{m+n}}$, mais, prise avec son second membre, et sous la condition d'abstraire la solution précédente en rendant G le plus petit possible (en valeur absolue) pour ψ voisin de zéro,

$$(87)\qquad G = -\frac{\psi^m}{(1-\psi)^{m+n}}\int_0^{\psi}\frac{P+Q\psi}{\psi(1-\psi)}\,I\,\frac{(1-\psi)^{m+n}}{\psi^m}\,d\psi.$$

On remarquera, effectivement, que, pour toute autre solution de l'équation (86), l'expression (87) de G s'accroîtrait d'une intégrale

de cette équation (86) *prise sans second membre*, ou obtenue dans l'hypothèse $I = 0$. Un tel accroissement de G et, par suite, ceux qu'il rendrait possibles dans les coefficients précédents ..., C, B, A, correspondraient donc à des solutions u d'un degré en η inférieur à $3i$, solutions censées connues déjà, et dont on convient, comme il a été dit, de faire abstraction.

Or, pour ψ ou très petit, ou très voisin de 1, la quantité sous le signe $\int$, dans (87), est, respectivement, ou de l'ordre de petitesse de $I\psi^{-m-1}$, ou de l'ordre de grandeur de $I(1-\psi)^{m+n-1}$. Et, alors, l'intégrale définie aura l'exposant de ses facteurs ψ, accru, au numérateur, d'une unité, mais l'exposant de ses dénominateurs $1-\psi$ diminué, au contraire, d'une unité. Cette intégrale définie serait donc soit de l'ordre de petitesse de $I\psi^{-m}$, soit de l'ordre de grandeur de $I(1-\psi)^{m+n}$. Et G atteindra précisément, dans les deux cas, l'ordre même ou de petitesse, ou de grandeur, de I.

La $(i+1)^{\text{ième}}$ expression particulière de u devient, par conséquent, dans toutes ses parties (en η^0, η^3, η^6, ..., η^{3i}), comparable à la $i(6i+7)^{\text{ième}}$ puissance de l'inverse de $1-\psi$, quand ψ tend vers l'unité, c'est-à-dire aux premiers instants du phénomène, et comparable à la $i(6i+5)^{\text{ième}}$ puissance de ψ quand ψ tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque, le sous-sol étant concave, ou k positif, le temps τ devient très grand. La première de ces circonstances est bien d'accord avec la formule (46), obtenue pour le cas d'un fond plat, où ψ reste indéfiniment voisin de 1.

41. Ainsi, quoique les coefficients de l'équation indéfinie varient maintenant avec le temps τ, de véritables *solutions simples* continuent à exister, encore *distinguées les unes des autres* par leur *rapidité de variation avec* η ou τ et, en particulier, *d'évanouissement* lorsque le temps τ grandit, *rapidité croissante avec leur numéro d'ordre* $1+i$.

Seulement, *elles ne sont plus le produit d'une fonction du temps par une fonction des coordonnées;* et leur allure est beaucoup moins régulière, ou plus difficile à saisir.

Quant à la solution générale, obtenue en faisant la somme de ces solutions simples après les avoir affectées de coefficients arbitraires, mais néanmoins évanouissants pour celles d'ordres très élevés (au

moins dans tous les cas d'un état initial bien continu), il est clair que ce sera une série en η^0, η^3, η^6, ..., et que cette série, quoique infinie ou revenant à prendre une infinité d'équations (82), vérifiera la condition spéciale à la limite $\eta = 1$, en raison même de l'extrême petitesse des coefficients éloignés, ou de leur évanouissement à mesure que leur numéro d'ordre s'élève.

Il est digne de remarque que les solutions simples, au lieu d'être formées, comme à l'ordinaire, avant l'intégrale générale, se dégagent ici de cette intégrale générale (81), obtenue dès l'abord en série, et en soient extraites grâce à un choix, des constantes arbitraires qu'introduit l'intégration des équations (82), assez bien fait pour grouper, justement, *ensemble* tous les termes à variation *également* rapide avec le temps τ et en constituer ces solutions.

Près des deux limites $\psi = 0$, $\psi = 1$, tous les coefficients A, B, C, ..., I des termes d'une même solution simple deviennent, comme on vient de voir, proportionnels ou à la $i(6i+5)^{\text{ième}}$ puissance de ψ, c'est-à-dire de $e^{-k\tau}$, ou à la $i(6i+7)^{\text{ième}}$ puissance de l'inverse de $1-\psi$, c'est-à-dire de τ. Et voilà pourquoi les solutions simples étaient les produits d'une fonction du temps par une fonction de η ou des coordonnées, dans les deux cas extrêmes, traités d'abord (au moins implicitement), de k ou très grand, ou infiniment petit, c'est-à-dire de dénivellations h soit fort petites par rapport aux profondeurs H de la nappe sous le plan horizontal du seuil de la source, soit, au contraire, très grandes à côté de ces profondeurs H.

Chacun des coefficients A, B, C, ... garde, comme le dernier d'entre eux, I, donné par (85), un même signe pour toutes les valeurs de ψ. Car, dans l'expression (87) de G, les facteurs variables ψ, $1-\psi$, $P+Q\psi$, ... sont tous positifs, tant sous le signe $\int$ que hors du signe $\int$. On voit de plus, à raison du signe $-$ placé devant l'expression de G, que ces coefficients se trouveront alternativement positifs et négatifs.

42. Enfin, tous seront algébriques et rationnels en ψ; car leur formule sera analogue à celle, (87), de G, où I est donné par (85) avec un exposant de ψ supérieur à m et un exposant de $1-\psi$ supérieur à $m+n$. Or l'intégrale définie s'y décompose immédiatement en

termes de la forme $\int_0^{\psi} \frac{\psi^{\mu} d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}}$, μ, ν y désignant des exposants entiers et positifs dont le plus grand est ν. Et le calcul de ces termes peut se faire comme il suit. Une intégration par parties donne d'abord

$$\nu \int_0^{\psi} \frac{\psi^{\mu} d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}} \quad \text{ou} \quad \int_{\psi=0}^{\psi} \psi^{\mu} d \frac{1}{(1-\psi)^{\nu}} = \frac{\psi^{\mu}}{(1-\psi)^{\nu}} - \mu \int_0^{\psi} \frac{\psi^{\mu-1} d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}} - \frac{\psi^{\mu} d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}};$$

d'où

$$(\nu - \mu) \int_0^{\psi} \frac{\psi^{\mu} d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}} = \frac{\psi^{\mu}}{(1-\psi)^{\nu}} - \mu \int_0^{\psi} \frac{\psi^{\mu-1} d\psi}{(1-\psi)^{\nu-1}}.$$

On abaisse ainsi l'exposant μ d'une unité, puis de 2, etc., jusqu'à ce qu'on arrive à $\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}}$, dont la valeur est $\frac{1}{\nu(1-\psi)^{\nu}} - \frac{1}{\nu}$; et il vient finalement

$$\int_0^{\psi} \frac{\psi^{\mu} d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}} = \frac{\text{un polynome } a + b\psi + c\psi^2 + \ldots + g\psi^{\mu}}{(1-\psi)^{\nu}} - a$$
$$= \frac{a + b\psi + c\psi^2 + \ldots + g\psi^{\mu} - a(1-\psi)^{\nu}}{(1-\psi)^{\nu}}.$$

Mais si l'on suppose que ψ tende vers zéro, le dénominateur, sous le signe $\int$, se réduit presque à l'unité, et l'intégrale, devenue sensiblement $\frac{\psi^{\mu+1}}{\mu+1}$, a un développement, suivant les puissances ascendantes de ψ, qui commence par le terme $\frac{\psi^{\mu+1}}{\mu+1}$. Donc le polynome $a + b\psi + \ldots + g\psi^{\mu}$ est détruit en entier par les $\mu+1$ premiers termes du développement de $-a(1-\psi)^{\nu}$ et, le coefficient de $\psi^{\mu+1}$ devant être $\frac{1}{\mu+1}$, l'on a

$$a = (-1)^{\mu} \frac{1.2.3\ldots\mu}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu)}.$$

La formule définitive de l'intégrale sera dès lors

$$(83) \quad \int_0^{\psi} \frac{\psi^{\mu} d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}} = \frac{1}{\mu+1} \frac{\psi^{\mu+1}}{(1-\psi)^{\nu}} \left(1 - \frac{\nu-\mu-1}{\mu+2}\psi + \frac{\nu-\mu-1}{\mu+2} \frac{\nu-\mu-2}{\mu+3}\psi^2 \right.$$
$$\left. - \frac{\nu-\mu-1}{\mu+2} \frac{\nu-\mu-2}{\mu+3} \frac{\nu-\mu-3}{\mu+4}\psi^3 + \ldots \right).$$

43. Jetons enfin un coup d'œil sur le cas d'un sous-sol convexe, où l'on aurait $k < 0$, $\psi > 1$ et où, par suite, pour τ croissant de zéro à l'infini, ψ grandirait de 1 à ∞. La valeur *finale* de ψ serait donc ∞, au lieu de zéro. Aussi y aurait-il lieu de remplacer (87) par la formule

$$(89) \qquad G = -\frac{\psi^m}{(\psi-1)^{m-n}} \int_\psi^\infty \frac{P+Q\psi}{\psi(\psi-1)} I \frac{(\psi-1)^{m-n}}{\psi^m} d\psi,$$

qui en est l'équivalent quand on fait abstraction d'une intégrale particulière de l'équation (86) prise sans second membre, intégrale appartenant à la $i^{\text{ième}}$ solution simple, censée obtenue déjà.

On voit que *deux coefficients consécutifs,* G, I, *de la série* (81) *auront encore signes contraires dans chaque solution simple.*

Mais, pour τ ou ψ très grands, $\psi - 1$ ne différera pas, *relativement,* de ψ; et il viendra

$$G = -\psi^n \int_\psi^\infty QI\psi^{n-1} d\psi,$$

ou, en substituant à I sa valeur (85), devenue $(-1)^{i(6i+7)}\psi^{-2i}$ et faisant toujours abstraction, dans I, d'un facteur constant,

$$(90) \qquad G = -Q\psi^n \int_\psi^\infty \frac{d\psi}{\psi^{2i-n+1}} = -\frac{Q\psi^{-2i}}{2i-n} = -\frac{Q}{2i-n} I.$$

Ainsi, les coefficients de la série (81) deviendront, pour τ très grand, du même ordre de petitesse que I, le dernier d'entre eux; savoir, comparables à la puissance $(2i)^{\text{ième}}$ de l'inverse de ψ, inverse $e^{k\tau}$ alors évanouissant.

L'expression correspondante $\zeta^{-\psi}\varepsilon$ des écarts, ou, vu (73), $\frac{\zeta\psi u}{(\psi-1)^2}$, deviendra, par suite, de l'ordre de $u\psi^{-1}$, ou de $(e^{k\tau})^{2i+1}$. Cet ordre de petitesse croît avec i : il est celui de $e^{k\tau}$, pour $i = 0$, c'est-à-dire pour la solution fondamentale ou aussi, vu (65), pour $H + h$ dans le mode d'écoulement se conservant, et celui de $(e^{k\tau})^3$ pour $i = 1$, c'est-à-dire pour la solution simple donnant l'expression asymptotique des petits écarts à considérer, dans la question de stabilité du régime constitué par un tel mode d'écoulement.

Donc, en résumé, *lorsque le sous-sol est convexe,* ou k négatif, *le*

mode d'écoulement qui se conserve est encore stable, mais beaucoup moins que dans le cas d'un sous-sol creux, où les écarts s'évanouissaient comme $(e^{-k\tau})^{12}$.

Enfin, l'on voit que, pour un fond très *convexe,* où k, négatif, aurait une valeur absolue considérable, rendant ψ très grand quand τ est modéré, les coefficients I, G, ..., C, B, A de chaque solution simple seraient tous proportionnels à $(e^{k\tau})^{2i}$. Les solutions simples deviennent ainsi, comme dans les deux autres cas limites d'un fond plat et d'un fond très concave, les produits d'une fonction du temps par une fonction des coordonnées. Cette fonction du temps est $e^{(2i+1)k\tau}$, alors qu'elle était $(e^{-k\tau})^{1+i(6i+5)}$ pour une nappe à fond très concave et $\tau^{-2-i(6i+7)}$ pour une nappe à fond plat [1].

§ X. — Tentative de généralisation.

44. Serait-il possible d'étendre à des formes de la nappe, moins spéciales que celles d'un cylindre à génératrices horizontales, ou d'une figure de révolution (avec invariabilité du produit $\mu K r^2$), les résultats si simples et si précis qu'a donnés l'analyse précédente? Je n'ai, encore, guère eu le temps de le chercher; et ce qui suit n'est qu'une généralisation immédiate, mais un peu vague, de quelques-unes des idées mises en œuvre ci-dessus.

Comme les équations fondamentales (2) et (3) (nos **7** et **8**) ne contiennent pas explicitement le temps, h est toujours de la forme

$$f(x, y, \tau),$$

c'est-à-dire

$$F(x, y, \tau_0 + t);$$

et l'on y satisfait aussi bien par

$$h = f(x, y, \tau)$$

---

[1] Les principaux résultats contenus dans les §§ I à IX ont fait l'objet de quatre Notes présentées à l'Académie des Sciences de Paris les 22 juin, 6, 13, 20 juillet 1903, et publiées aux *Comptes rendus* de ces jours (t. CXXXVI, p. 1511, et t. CXXXVII, p. 5, 101 et 153).

que par

$$f(x, y, \tau_0 + \delta\tau_0 + t) = f(x, y, \tau + \delta\tau_0) = h + \frac{dh}{d\tau}\delta\tau_0.$$

Cela posé, formons le système linéaire régissant la différence, δh, de deux intégrales particulières, infiniment voisines, qui vérifient (2) et (3). Il sera formé évidemment par l'équation, indéfinie, obtenue en prenant la variation δ de chaque terme de (2),

$$(91)\quad \mu\frac{d\delta h}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{KH}\frac{d\delta h}{dx} + \mathrm{K}\frac{d.h\delta h}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{KH}\frac{d\delta h}{dy} + \mathrm{K}\frac{d.h\delta h}{dy}\right),$$

et par les conditions au contour, déduites de même de (3),

$$(92)\qquad \left(\delta h \text{ ou } \frac{d\delta h}{dn}\right) = 0 \text{ (sur le contour)}.$$

La remarque précédente montre que ces équations linéaires, en δh, admettent comme intégrale particulière l'expression $\frac{dh}{d\tau}\delta\tau_0$, ou, abstraction faite du facteur constant $\delta\tau_0$, la vitesse même de variation $\frac{dh}{d\tau}$ des dénivellations h sur les diverses verticales (x, y). Et, en effet, si l'on différentie en τ tous les termes de (2) et (3), puis qu'on pose dans les résultats, pour abréger, $\frac{dh}{d\tau} = v$, il vient

$$(93)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu\frac{dv}{d\tau} = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{KH}\frac{dv}{dx} + \mathrm{K}\frac{d.hv}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{KH}\frac{dv}{dy} + \mathrm{K}\frac{d.hv}{dy}\right),\\ &\qquad\text{(au contour)}\quad \left(v \text{ ou } \frac{dv}{dn}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

relations ne différant de (91) et (92) que par la substitution de v à δh.

45. Supposons maintenant la nappe, et les données K, μ, H, de formes telles, qu'une seule variable, dans l'*espace*, suffise (outre le temps τ) à les définir, comme étaient soit l'abscisse x, soit la distance r à l'axe, dans les cas de figures ou cylindriques, ou de révolution, que nous avons étudiées. Alors l'ordonnée de superficie, h, de la première nappe considérée, ordonnée à partir de l'extrémité de laquelle se

comptent, sur chaque verticale, tous les petits écarts possibles δh, pourra être choisie, à chaque instant τ, pour cette variable même; de sorte que δh ne sera fonction de x et de y, *à ce moment donné quelconque* τ, que par l'intermédiaire de h. Changeant aussi de fonction inconnue dans (91) et (92), nous substituerons à δh la quantité ε définie par la formule

$$\delta h = e^{-\int \frac{dh}{H+h}} \varepsilon, \tag{94}$$

de même qu'aux n^os^ **20** et **33** nous avons appelé $\zeta^{-1}\varepsilon$ et $\zeta^{-\psi}\varepsilon$ les écarts; et, cela, encore afin de rendre monomes, dans (91), les expressions entre parenthèses. Nous aurons, en effet,

$$KH\frac{d\,\delta h}{d(x,y)} = Ke^{-\int \frac{dh}{H+h}}\left(H\frac{d\varepsilon}{d(x,y)} - \frac{H\varepsilon}{H+h}\frac{dh}{d(x,y)}\right),$$

$$K\frac{d.h\,\delta h}{d(x,y)} = Ke^{-\int \frac{dh}{H+h}}\left(h\frac{d\varepsilon}{d(x,y)} + \varepsilon\frac{dh}{d(x,y)} - \frac{h\varepsilon}{H+h}\frac{dh}{d(x,y)}\right),$$

formules d'où résultent bien, pour les deux parenthèses de (91), les expressions simples

$$K(H+h)e^{-\int \frac{dh}{H+h}}\frac{d\varepsilon}{d(x,y)}.$$

L'équation indéfinie (91) deviendra donc

$$\left\{\begin{aligned} &\mu\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\int \frac{dh}{H+h}}\varepsilon\right) \\ &\quad = \frac{d}{dx}\left[K(H+h)e^{-\int \frac{dh}{H+h}}\frac{d\varepsilon}{dx}\right] + \frac{d}{dy}\left[K(H+h)e^{-\int \frac{dh}{H+h}}\frac{d\varepsilon}{dy}\right]. \end{aligned}\right. \tag{95}$$

En la complétant par les conditions au contour $\left(\varepsilon \text{ ou } \frac{d\varepsilon}{dn}\right) = 0$, on aura, en ε, les équations de refroidissement d'une certaine plaque à faces rayonnantes, dont la conductibilité *intérieure*, $K(H+h)e^{-\int \frac{dh}{H+h}}$, la conductibilité *extérieure*, $\mu\frac{d}{d\tau}e^{-\int \frac{dh}{H+h}}$, et la *capacité calorifique*, $\mu e^{-\int \frac{dh}{H+h}}$, varieraient avec h et, par conséquent, tout à la fois avec la verticale (x, y) et le temps τ.

46. Nous connaîtrons à ce système, si h est donné, la solution particulière où $e^{-\int\frac{dh}{H+h}}\varepsilon$ a la valeur $\frac{dh}{dz}$, c'est-à-dire v, et où ε admet ainsi l'expression

$$\varepsilon_1 = e^{\int\frac{dh}{H+h}}v. \tag{96}$$

Or, écrivant l'équation indéfinie (95) avec ε_1 à la place de ε, multiplions par ε cette équation en ε_1; et, de l'équation même (95), multipliée par ε_1, retranchons les produits obtenus. Si nous appelons u le quotient de ε par ε_1, ou que nous posions

$$\varepsilon = \varepsilon_1 u = e^{\int\frac{dh}{H+h}}vu, \tag{97}$$

il viendra, pour régir u, l'équation indéfinie

$$\left\{\begin{aligned}\mu v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dz} &= \frac{d}{dx}\left[K(H+h)v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dx}\right]\\ &\quad+\frac{d}{dy}\left[K(H+h)v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dy}\right]\\ &= \frac{d}{dx}\left[K(H+h)\frac{dh}{dx}\cdot v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dh}\right]\\ &\quad+\frac{d}{dy}\left[K(H+h)\frac{dh}{dy}\cdot v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dh}\right],\end{aligned}\right. \tag{98}$$

ou bien, en effectuant les différentiations comme aux n^os^ **24** ou **35**, puis éliminant par (2) les dérivées, en x et y, de h, sauf dans $(\Delta_1 h)^2$, et divisant enfin par $K(H+h)(\Delta_1 h)^2$:

$$\frac{\mu v^2}{K(H+h)(\Delta_1 h)^2}e^{\int\frac{dh}{H+h}}\left(\frac{du}{dz}-\frac{du}{dh}\frac{dh}{dz}\right)=\frac{d}{dh}\left(v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dh}\right). \tag{99}$$

Mais imaginons qu'on se déplace d'un instant à l'autre, en suivant sans cesse chaque valeur de h là où elle se produit, c'est-à-dire de manière que les coordonnées x, y de l'observateur éprouvent sans cesse

des accroissements dx, dy vérifiant la relation

$$\frac{dh}{d\tau}d\tau + \frac{dh}{dx}dx + \frac{dh}{dy}dy = 0.$$

La différentielle de u observée sera

$$du = \frac{du}{d\tau}d\tau + \frac{du}{dh}\left(\frac{dh}{dx}dx + \frac{dh}{dy}dy\right) = \left(\frac{du}{d\tau} - \frac{du}{dh}\frac{dh}{d\tau}\right)d\tau;$$

et, par suite, la différence $\frac{du}{d\tau} - \frac{du}{dh}\frac{dh}{d\tau}$ exprimera la dérivée de u *constatée,* en quelque sorte, par l'observateur. Or, ce sera justement la dérivée *partielle* de u en τ, ou *calculée sans faire varier* h, si l'on convient d'adopter désormais τ et h *pour variables indépendantes,* au lieu de τ, x et y. Ainsi, *dans ce système de variables* τ *et* h, l'équation aux dérivées partielles en u aura la forme *binome*, déduite de (99),

$$(100)\qquad \left(\frac{\mu v^2}{K(H+h)(\Delta_1 h)^2}e^{\int\frac{dh}{H+h}}\right)\frac{du}{d\tau} = \frac{d}{dh}\left(v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dh}\right).$$

C'est l'équation des températures successives u d'une barre se refroidissant, à faces latérales imperméables, qui aurait une conductibilité $v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}$ et une capacité calorifique, $\frac{\mu v^2}{K(H+h)(\Delta_1 h)^2}e^{\int\frac{dh}{H+h}}$, fonctions à la fois de l'abscisse h et du temps τ; car non seulement v, mais même H (dont la variable immédiate x, r, etc. serait maintenant remplacée par son expression en h et τ) dépendraient du temps τ.

47. Dans le cas simple où h, H sont respectivement $T\zeta$, $k\zeta$, c'est-à-dire $\frac{k\psi}{1-\psi}\zeta$, $k\zeta$ [d'où il résulte

$$\zeta = \frac{1-\psi}{k\psi}h, \qquad e^{\int\frac{dh}{H+h}} = \zeta^{\psi} = \left(\frac{1-\psi}{k\psi}\right)^{\psi}h^{\psi},$$

$$v = h\frac{T'}{T} = -h(k+T) = -\frac{kh}{1-\psi}, \qquad \varepsilon_1 = -\left(\frac{k}{1-\psi}\right)^{1-\psi}\frac{h^{1+\psi}}{\psi^{\psi}}\Bigg],$$

et où, $\frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2$ ayant, d'après (33 *bis*) (n° **24**), la valeur $\frac{2(m^3-\zeta^3)}{3\zeta^2}$,

avec m maximum donné de ζ (lié à L), la fonction $\frac{k}{\mu}(\Delta_1 h)^2$ est

$$\frac{2T}{3}\,\frac{m^3T^3-h^3}{h^2}=\frac{k\psi}{1-\psi}\,\frac{2}{3h^2}\left[\frac{m^3k^3\psi^3}{(1-\psi)^3}-h^3\right],$$

cette équation (100) devient, vu aussi que $\frac{d}{d\tau}=-k\psi\frac{d}{d\psi}$,

$$(100\ bis)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{mk\psi}{1-\psi}\right)^3\frac{2}{h^2}\frac{d}{dh}\left(h^{2+\psi}\frac{du}{dh}\right)\\&\quad=2h\frac{d}{dh}\left(h^{2+\psi}\frac{du}{dh}\right)-3\psi(1-\psi)h^{1+\psi}\frac{du}{d\psi}.\end{aligned}\right.$$

Comparée à l'équation très analogue (76) (n° **56**), elle a un terme de moins à son second membre, ce qui simplifie notablement celui-ci; mais, par contre, le premier membre se trouve affecté du nouveau coefficient $\left(\frac{mk\psi}{1-\psi}\right)^3$, fonction du temps. Son intégrale générale sera donc encore la somme de deux séries, de la forme

$$Ah^{\alpha}+Bh^{\alpha+3}+Ch^{\alpha+6}+\ldots,$$

avec A, B, C, ... fonctions de ψ, et α toujours égal soit à zéro, soit à $-1-\psi$. D'ailleurs, l'annulation obligée, pour $\zeta=0$ ou $h=0$, de la fonction ε, produit $\varepsilon_1 u$ proportionnel à $h^{1+\psi}u$, fera encore évanouir la seconde série et donnera pour u la formule

$$u=A+Bh^3+Ch^6+\ldots.$$

Mais celle-ci ne paraît devoir présenter aucun avantage sur (81), à raison de la présence explicite de ψ, dans le premier membre de (100 *bis*), d'une manière moins simple que dans celui de (76).

La nouvelle méthode, suggérée par l'équation (100), pour traiter le problème posé, ne semble donc pas conduire plus rapidement au résultat que la méthode directe suivie au § IX.

On remarquera que, dans le cas d'un fond plat, c'est-à-dire de k infiniment petit, où $\psi=1$, elle donne à la première solution simple, ε_1, d'après une des formules ci-dessus, l'expression $\varepsilon_1=-h^2$, indépendante du temps. Mais, dans le même cas, elle a, comme on pouvait s'y attendre, le grave inconvénient de ne pas réduire les autres solu-

tions simples à des produits d'une fonction du temps τ par une fonction de l'autre variable indépendante, qui est alors h.

48. L'équation indéfinie (98), multipliée soit par l'élément $d\sigma = dx\,dy$ de la projection horizontale σ de la nappe, soit par $u\,d\sigma$, et intégrée à la manière ordinaire dans toute l'étendue de cette projection, donne immédiatement, en tenant compte des conditions au contour, les deux formules

$$(101)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\sigma \mu v^2 e^{\int \frac{dh}{H+h}} \frac{du}{d\tau}\, d\sigma = 0,\\ &\int_\sigma \mu v^2 e^{\int \frac{dh}{H+h}} \frac{d\frac{u^2}{2}}{d\tau}\, d\sigma = -\int_\sigma K(H+h) v^2 e^{\int \frac{dh}{H+h}} (\Delta_1 u)^2\, d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Les dérivées partielles de u et de $\frac{1}{2}u^2$ en τ y sont, d'ailleurs, prises *sur place*, c'est-à-dire dans le système des variables x, y et τ. Mais je ne vois pas comment l'on pourrait tirer de ces formules des résultats simples, en dehors du cas particulier, étudié au § VII, d'un fond horizontal, cas où $H = 0$ et où h, v, u ont les formes respectives

$$h = \frac{\zeta}{\tau}, \qquad v = -\frac{\zeta}{\tau^2}, \qquad u = \frac{U}{\tau^{\beta-2}},$$

produits de fonctions des coordonnées par des fonctions du temps. Dans ce cas particulier, les deux équations (101) deviennent immédiatement

$$(101\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &(\beta-2)\int_\sigma \mu\zeta^3 U\, d\sigma = 0,\\ &(\beta-2)\int_\sigma \mu\zeta^3 U^2\, d\sigma = \int_\sigma K\zeta^4 (\Delta_1 U)^2\, d\sigma; \end{aligned}\right.$$

et la seconde montre que la différence $\beta - 2$, rapport de deux intégrales à éléments positifs, est essentiellement positive elle-même, sauf quand on a

$$\Delta_1 U = 0, \qquad U = \text{const.}, \qquad \beta = 2,$$

tandis que la première prouve la nécessité, pour toute solution simple *différant de cette solution fondamentale où* $\beta = 2$, de changements

de signe dans l'étendue σ du plan de la nappe, puisque la valeur moyenne de l'expression $\mu\zeta^3 U$ s'y annule.

On peut en dire autant de la formule que donne la première de ces relations (101), quand on appelle u, dans (98), le quotient de deux solutions particulières quelconques ε, ε_1 de l'équation indéfinie (95) et des conditions au contour qui lui sont adjointes, cas où l'équation (98) garde la même forme, sauf la substitution de $\varepsilon_1^2 e^{-\int\frac{dh}{H+h}}$ à $\varepsilon^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}$. Cette première relation (101) est donc alors

$$(102)\qquad \int_\sigma \mu\varepsilon_1^2 e^{-\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dz}\,d\sigma = 0,$$

c'est-à-dire

$$(102\ bis)\qquad \int_\sigma \mu e^{-\int\frac{dh}{H+h}}\left(\varepsilon_1\frac{d\varepsilon}{dz} - \varepsilon\frac{d\varepsilon_1}{dz}\right)d\sigma = 0.$$

Toutefois, il importe d'observer, dans la démonstration, que le second membre de l'équation (98), modifié comme il est dit, donne alors l'intégrale de contour

$$\int K(H+h)e^{-\int\frac{dh}{H+h}}\varepsilon_1^2\frac{du}{dn}\,d\mathcal{L},$$

à prendre non seulement à la limite de l'aire totale σ, mais encore le long des lignes intérieures (*de discontinuité*) où, ε_1 changeant de signe, le quotient u devient *infini*. Heureusement, le produit $\varepsilon_1^2\frac{du}{dn}$, ou $\varepsilon_1\frac{d\varepsilon}{dn} - \varepsilon\frac{d\varepsilon_1}{dn}$, y reste fini et, sans s'y annuler comme au contour proprement dit, a deux valeurs exactement contraires, sur un même élément $d\mathcal{L}$, dans les deux régions y aboutissant. L'intégrale totale est donc encore nulle.

Mais il n'en serait plus de même, pour l'intégrale analogue, si l'on voulait généraliser pareillement la seconde équation (101). Car, alors, l'intégrale à prendre le long des lignes intérieures de discontinuité aurait un facteur u de plus sous le signe $\int$, ou serait

$$\int K(H+h)e^{-\int\frac{dh}{H+h}}\left(\varepsilon_1\frac{d\varepsilon}{dn} - \varepsilon\frac{d\varepsilon_1}{dn}\right)u\,d\mathcal{L}.$$

La fonction sous le signe f devenant ainsi infinie, il n'y aura pas, comme on voit, une formule simple, à deux termes seulement, généralisée de la seconde (101).

Celle-ci n'est donc démontrée que sous la condition, vérifiée dans tous les cas traités ici, que la solution appelée ε_1 ait essentiellement même signe partout, à l'intérieur de l'aire σ, c'est-à-dire qu'on ait $v < 0$ dans (96), ou que la nappe (à ordonnée h), à partir de laquelle se comptent les petits écarts δh, s'abaisse, continuellement, *dans toute son étendue* [1].

---

[1] La démonstration de l'uniformité de signe (sans annulation à l'intérieur) de certaines solutions particulières, qu'on peut dès lors appeler *fondamentales*, dans le problème du refroidissement, démonstration donnée au n° 130 de ma *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique, etc.* (t. I, p. 254), subsiste, sans aucun changement, quand la conductibilité intérieure, la conductibilité extérieure et la capacité calorifique deviennent fonction du temps, pourvu que la conductibilité *intérieure* et la *capacité* aient même signe, comme il arrive justement, ici, dans l'équation (95).

La présente discussion montre qu'il pourrait y avoir quelque intérêt à reprendre certains Chapitres de la *Théorie analytique de la chaleur* dans cette hypothèse de corps dont les propriétés calorifiques dépendraient ainsi du temps.

Je m'aperçois, par exemple, que la seconde équation (101), facile à étendre à tout corps de contexture symétrique (ou admettant un potentiel des flux de chaleur) et à surface ou intérieur rayonnants, démontre l'existence d'une expression asymptotique *unique* pour l'intégrale générale ε, c'est-à-dire la tendance de son quotient u par la solution fondamentale ε_1 vers une valeur uniforme et constante. Car elle fait voir que, si le paramètre différentiel $\Delta_1 u$ conservait indéfiniment des valeurs sensibles, la dérivée en τ du carré u^2 garderait aussi, *indéfiniment*, sa valeur moyenne (convenablement définie) dans tout l'intérieur du corps, *négative et de grandeur notable;* ce qui est impossible, puisque ce carré ne peut pas s'abaisser au-dessous de zéro. Donc la seconde équation (101) implique bien que, pour τ assez grand, $\Delta_1 u$ tende vers zéro, ou u vers une valeur C uniforme et, dès lors, invariable. D'où il suit que l'expression asymptotique de ε sera nécessairement celle de $C\varepsilon_1$, ou, encore, qu'*il n'y a qu'une seule solution simple fondamentale distincte*.

La démonstration se précise, quand les propriétés calorifiques du corps deviennent indépendantes du temps et que ε, ε_1 se réduisent à deux solutions simples. Car alors l'équation considérée prend une forme analogue à celle de la

C'est l'équation (102) qui rend possible la méthode d'élimination de Fourier (pour le calcul des coefficients arbitraires c affectant les diverses solutions simples), quand ε et ε_1 sont les produits de fonctions *différentes*, T, T_1, du temps par des fonctions, v, v_1, de ζ. Car, si l'on a $\varepsilon = Tv$, $\varepsilon_1 = T_1 v_1$, avec $\frac{T}{T_1}$ non constant, elle revient immédiatement à

$$\int_\sigma \mu e^{-\int \frac{dh}{H+h}} v v_1 \, d\sigma = 0, \quad \text{ou à} \quad \int_\sigma \mu e^{-\int \frac{dh}{H+h}} \varepsilon \varepsilon_1 \, d\sigma = 0.$$

Dès lors, l'intégrale générale en série

$$\delta h = e^{-\int \frac{dh}{H+h}} \Sigma c \varepsilon,$$

multipliée par $\mu \varepsilon \, d\sigma$ et intégrée sur toute la projection horizontale σ de la nappe, donne simplement

$$\int_\sigma \mu \varepsilon (\delta h) \, d\sigma = c \int_\sigma \mu e^{-\int \frac{dh}{H+h}} \varepsilon^2 \, d\sigma,$$

équation d'où se tire la valeur de c, pourvu que l'on substitue à ε et à δh leurs valeurs initiales, censées connues.

Pour revenir encore au cas général où $\varepsilon, \varepsilon_1$ ne sont plus des produits de la forme Tv, $T_1 v_1$, tout ce qu'on peut, ce semble, y déduire de simple, des relations (101) et (102), c'est que le rapport u de deux solutions *distinctes* a sa dérivée par rapport au temps τ de signes variés aux divers points du plan σ de la nappe, ou qu'il grandit dans certaines régions pendant qu'il diminue dans d'autres; et que le demi-carré $\frac{u^2}{2}$ du rapport de l'une quelconque, non fondamentale, de ces solutions, à une *solution fondamentale* (*de signe uniforme* sur toute l'aire σ), a sa dérivée analogue en τ négative sur une étendue $\int d\sigma$ notable, de

---

seconde (101 *bis*) et exige, comme on a vu après celle-ci, un évanouissement plus rapide pour ε que pour ε_1, si $\Delta_1 u$ diffère de zéro.

Ainsi se trouve complétée et généralisée une question restée jusqu'ici, au moins partiellement, en suspens (voir ma *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique, etc.*, t. I, p. 255).

manière à décroître pendant que le temps τ grandit. En d'autres termes, les solutions particulières non fondamentales s'évanouissent plus vite que les solutions fondamentales. Quant au cas où u désignerait le rapport de deux solutions *fondamentales toutes les deux*, ce rapport y tendrait, sans doute, assez vite vers une valeur constante, pour rendre négligeables, tout à la fois, $\Delta_1 u$ dans le second membre de la deuxième relation (101) et la dérivée en τ de $\frac{u^2}{2}$ dans le premier membre.

§ XI [1]. — Application de la théorie à deux sources de la Vanne étudiées par M. Edmond Maillet.

49. Au moment où se termine l'impression de la présente étude, M. Maillet vient de faire connaître le coefficient α de tarissement de la source de Cérilly, dont il est question au n° **11**, et qui a, durant le semestre d'été, des débits moyens compris, suivant les années, entre 150 litres et 200 litres environ par seconde. Ce coefficient vaut, à très peu près, 0,1066, lorsqu'on prend le mois pour unité de temps [2].

Quant à la source d'Armentières, pour le moins triple de celle de Cérilly, et dont il a été parlé également au n° **11**, M. Maillet représente ses débits Q, toujours en litres par seconde, durant la saison chaude, et les temps t étant comptés de même en mois, au moyen de l'expression empirique, très approchée,

$$Q = 158,8 + \frac{740}{(1 + 0,12\,t)^2} \quad (^3). \tag{103}$$

---

(1) Ajouté au Mémoire en décembre 1903, après le tirage des feuilles précédentes.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXXXVII, 30 novembre 1903, p. 947. On voit encore, dans la même Note, qu'il y aurait un coefficient α de tarissement également constant (valant 0,0380 d'après une Communication officieuse de M. Maillet), pour la source de la Dhuis, dont les débits d'été varient entre 270 litres et 170 litres, et qui alimente Paris comme celles de la Vanne, mais sur la rive droite de la Seine.

(3) Je dois la connaissance de cette formule, encore inédite, et des autres résultats d'observation, concernant la source d'Armentières, mentionnés ci-après,

Abstraction faite du terme constant 158,8, elle rentrerait dans la formule que nous avons obtenue pour le cas d'un fond horizontal *contenant le seuil de la source;* et elle a été suggérée justement à M. Maillet par cette formule, à laquelle l'avaient conduit de son côté certaines considérations théoriques ([1]).

50. Mais ce terme constant 158,8 est beaucoup trop grand pour pouvoir être négligé. On pourrait, à la rigueur, l'expliquer en admettant que la source d'Armentières provient de la réunion de deux distinctes, dont la première, d'un coefficient de tarissement *insensible,* donnerait la partie *constante* du débit, tandis que la seconde, à bassin plat ayant son fond au niveau du seuil, fournirait la partie inverse de $(1 + 0,12\,t)^2$. Mais il semble naturel de recourir, de préférence, à l'autre explication, plus vraisemblable *a priori,* annoncée vers la fin du n° **11**. On n'est pas surpris, en effet, qu'une source aussi forte mette longtemps à se régulariser, et que plusieurs mois, sinon même

---

à une obligeante Communication de M. Maillet, qui a, d'ailleurs, fait porter ses études sur les deux sources de Cérilly et d'Armentières, de préférence à d'autres de la Vanne tout aussi fortes, parce que ces deux-là sont *les moins constantes* et semblaient, dès lors, les plus propres à manifester *les lois de variation* des sources du bassin. L'idée d'introduire le terme 158,8 dans la formule (103) lui est venue d'une relation approximative,

$$A = 1,52\,C + 158,8,$$

qu'il a constatée entre les deux débits minima (chaque année), A et C respectivement, des deux sources d'Armentières et de Cérilly. Cette relation approximative entre A et C conduirait, si l'on admet la simultanéité des minima annuels pour les deux sources et leur production au bout du temps $t = 6$, à faire correspondre à la formule (103), concernant la source d'Armentières, l'expression $Q = 312\,e^{-0,1066t}$, pour celle de Cérilly. Cette dernière expression paraît, néanmoins, un peu forte, et le coefficient 312 devrait s'y réduire à 280 environ. Il n'y a guère à cela de difficulté, la relation ci-dessus entre A et C n'étant donnée par M. Maillet, dans sa Note du 12 mai 1902 *Sur la prévision des débits minima des sources de la Vanne* (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, p. 1103), que comme approchée *à un dixième près.*

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXXXVII, 27 octobre 1903, p. 676.

un semestre entier, soient nécessaires, après les pluies d'hiver, pour y faire évanouir ou, du moins, rendre insensible le second terme de la solution complète en série d'exponentielles, indiquée par le procédé d'intégration, dû à Fourier, de l'équation approximativement linéaire du mouvement. Alors, si β est le coefficient d'extinction dans l'exponentielle affectant ce second terme simple, le débit prendra la forme binome

$$(104) \qquad Q = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}.$$

Pour revenir à une hypothèse indiquée ci-dessus, mais l'appliquer dans des conditions moins particulières, il ne serait pas, non plus, improbable que, toujours à raison de son gros volume, la source d'Armentières fût *multiple*, c'est-à-dire résultât de la jonction de plusieurs sources, à bassins d'alimentation contigus. L'écoulement, en temps de sécheresse, s'y expliquerait alors par la superposition de tous les systèmes de solutions simples convenant à ces bassins respectifs, avec réduction plus ou moins rapide de chaque système à son terme fondamental; et l'on aurait ainsi pour Q une expression encore de la forme $Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + \ldots$.

Au fond, ce cas est compris dans le précédent, dont rien n'oblige à restreindre la généralité; car plusieurs bassins à débouché commun peuvent être regardés comme constituant un bassin plus général, pourvu du moins que leurs *seuils d'écoulement* se trouvent, comme nous l'avons admis (n° **8**), à un même niveau; et le terme fondamental propre à la *deuxième* source partielle, celle dont le coefficient β de tarissement viendrait, quant à la petitesse, aussitôt après α, ne serait alors autre que le second terme de la solution de Fourier pour la source totale.

51. Raisonnons dans les hypothèses les plus simples, en vue de nous y borner si leur confrontation avec les faits prouve qu'elles suffisent. Or ces hypothèses sont celles d'une source *unique*, avec profondeur H et largeur L de son bassin d'alimentation *constantes*, comme au n° **10**. Les coefficients d'extinction α, β, ... des exponentielles successives se trouvent alors proportionnels à la suite des carrés impairs $1, 9, \ldots, (2i+1)^2, \ldots$; et l'on a $\beta = 9\alpha$. Il est, de

plus, probable que α diffère peu du plus faible décroissement mensuel *relatif* de Q, constaté à la fin des semestres d'été, décroissement reconnu, par M. Maillet, égaler 0,0366 ou, sensiblement, 0,037, en se bornant à trois décimales. Il y a donc lieu d'essayer les valeurs

$$\alpha = 0,037, \qquad \beta = 9\alpha = 0,333.$$

Nous déterminerons enfin A et B, dans (104), par les deux conditions que cette formule (104) donne la valeur initiale convenue 898,8 et, en outre, la même valeur moyenne que (103) dans l'intervalle pour lequel les deux formules doivent être employées, c'est-à-dire, sensiblement, entre les deux limites $t = 0$, $t = 6$. Or, en multipliant (103) et (104) par dt, puis intégrant de zéro à t et divisant par t, il vient, comme expressions de ces deux moyennes,

$$(105) \qquad 158,8 + \frac{740}{1 + 0,12t}, \qquad A\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha t} + B\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta t},$$

où il faudra faire $t = 6$, $\alpha = 0,037$, $\beta = 0,333$. La première étant alors 589,03, et, d'ailleurs, l'expression initiale de Q se réduisant, dans (104), à A + B, nous aurons donc en A et B les deux équations

$$A + B = 898,8, \qquad \frac{1 - e^{-0,222}}{0,222}A + \frac{1 - e^{-1,998}}{1,998}B = 589,03.$$

Leur résolution, avec l'aide d'une Table de logarithmes à cinq décimales, donne A = 431,32 et B = 467,46.

Ainsi, l'expression, à deux exponentielles, qu'il s'agit de contrôler, sera

$$(106) \qquad Q = 431,3e^{-0,037t} + 467,5e^{-0,333t}.$$

Il en résulte :

	Pour						
	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$
Q =	898,8	750,7	640,7	558,1	495,4	446,9	408,8;

tandis que la formule empirique (103) prend les valeurs, à peine différentes,

Q =	898,8	748,7	640,1	559,6	496,6	447,9	408,9.

D'après une remarque de M. Maillet, touchant la légère imperfection de la formule (103) aux environs de $t = 1$, où elle se trouverait être un peu trop faible, l'expression (106) paraîtrait préférable; elle serre, en tout cas, de fort près les résultats observés. Or elle deviendrait encore plus précise, si l'on y faisait subir à α, β, A, B de *petites* corrections, par rapport auxquelles l'équation (104) pourrait être censée linéaire, et si l'on déterminait ces corrections de manière, d'une part, à laisser égale à 898,8 la valeur initiale, d'autre part, à rendre, par exemple, nul en moyenne l'écart de la formule d'avec les résultats observés, dans chacun des trois intervalles compris respectivement entre $t = 0$ et $t = 2$, $t = 2$ et $t = 4$, $t = 4$ et $t = 6$. Mais on voit que de pareilles corrections seraient superflues, au moins actuellement.

32. Le second coefficient, B, de la formule paraît donc bien être, pour la source d'Armentières, un peu supérieur au premier, A. Une telle circonstance semble indiquer, dans la nappe d'alimentation de cette source, considérée vers la fin de la saison d'hiver ou le début de la saison d'été, au moment où le débit Q passe par la valeur 898,8, une forme bombée à une certaine distance de la ligne de faîte, c'est-à-dire vers le milieu, plutôt que sur le faîte même du bassin; de manière qu'après avoir ôté, des ordonnées h, d'abord croissantes et ensuite, peut-être, décroissantes, de $x = 0$ à $x = L$, le premier terme de leur développement en série trigonométrique, terme partout positif et proportionnel à $\sin\frac{\pi x}{2L}$, l'on ait un excédent se rapprochant de la forme du second terme de la série, d'abord positif puis négatif, où le facteur fonction de l'abscisse x est $\sin\frac{3\pi x}{2L}$.

Il est aisé de voir, en effet, comment varie *initialement*, à partir du thalweg de la source où $x = 0$, en allant vers le faîte où $x = L$, l'ordonnée superficielle h, supposée ainsi de la forme

$$h = C\left(e^{-\alpha t}\sin\frac{\pi x}{2L} + c e^{-9\alpha t}\sin\frac{3\pi x}{2L}\right). \tag{107}$$

Le débit Q, ou $Ae^{-\alpha t} + Be^{-9\alpha t}$, se trouvant proportionnel à la

pente $\frac{dh}{dx}$ de superficie pour $x = 0$, l'on aura

$$c = \frac{B}{3A} = \frac{467,5}{3.431,3} = 0,3613;$$

et l'ordonnée *initiale* h variera, du thalweg au faîte, comme l'expression

$$(108) \qquad \sin\frac{\pi x}{2L} + c\sin\frac{3\pi x}{2L} = \sin\frac{\pi x}{2L} + 0,3613\sin\frac{3\pi x}{2L}.$$

Or celle-ci, partie de zéro, atteint successivement, d'abord, son maximum, puis, finalement, un minimum, pour les deux valeurs respectives de la variable $\frac{\pi x}{2L}$ qui annulent la dérivée

$$(109) \quad \cos\frac{\pi x}{2L} + 3c\cos\frac{3\pi x}{2L} = 12c\left(\cos^2\frac{\pi x}{2L} - \frac{9c-1}{12c}\right)\cos\frac{\pi x}{2L},$$

c'est-à-dire qui donnent

$$(110) \quad \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2L} = \left(\text{soit } \sqrt{\frac{9c-1}{12c}},\ \text{soit zéro}\right), \\ \text{ou} \quad \frac{\pi x}{2L} = (\text{soit } 43^\circ 53',5,\ \text{soit } 90^\circ). \end{cases}$$

Le premier de ces deux arcs est la fraction 0,4877 du second $\frac{\pi}{2}$. Donc le *sommet* de la nappe se trouve, initialement, aux 49 centièmes environ de la largeur L, à partir du thalweg. Le rapport de son altitude h à l'altitude analogue de la nappe sur le faîte est celui des deux valeurs correspondantes, 0,9631 et $1 - c$ ou 0,6387, de l'expression (108), rapport très peu différent de $\frac{3}{2}$. Ainsi, la nappe aqueuse paraît présenter, à l'époque $t = 0$, c'est-à-dire au début de la saison sèche, un renflement fort sensible vers le milieu de sa largeur.

33. C'est, probablement, dans la constitution *variée* de la couche superficielle du sol, sur le bassin d'alimentation dont il s'agit, ou dans

la diversité des cultures existant en ses multiples régions, qu'il faut chercher l'explication de cette particularité. En effet, eu égard à la grande étendue que doit avoir le bassin en question, une variété du sol et des cultures plus accentuée que sur celui de la source de Cérilly n'y est pas invraisemblable; et, si, grâce à une telle hétérogénéité (pouvant n'être que superficielle), l'évaporation y est rendue plus active, ou, encore, le ruissellement instantané des pluies vers les rivières plus accusé, près de la ligne de faîte que vers le milieu du bassin, l'affluence des eaux pluviales à la nappe aqueuse souterraine sera notablement plus grande en ce milieu du bassin qu'au voisinage du faîte. Dès lors, la nappe affectera, au début de la saison sèche, c'est-à-dire à la fin des périodes pluvieuses, cette forme convexe au centre, qui rend prédominant dans le débit Q le second terme simple de l'intégrale.

Il resterait toutefois à expliquer comment un pareil effet est assez bien réglé, pour qu'une courbe *unique* des débits convienne, à peu près, *toutes les années,* ou pour que les deux termes de la formule (104) aient sensiblement, entre eux, un rapport constant au moment où le débit total passe par la valeur choisie $898^{l},8$. Car, sans cela, la formule des débits contiendrait, *comme paramètre variable d'un été à l'autre,* le rapport $\frac{B}{A}$ [1].

54. Quoi qu'il en soit de cette nouvelle question et de la réponse à y faire, l'exemple des deux sources de Cérilly et d'Armentières [2] tend bien à montrer, conformément à l'opinion émise au n° **11**, que, pour les sources *importantes des terrains perméables, le bassin d'alimentation est très profond au-dessous de leurs seuils.* Or, cette circonstance justifierait la réduction de l'équation du mouvement à la forme linéaire de celle de la chaleur, et l'emploi des solutions en

---

[1] L'hypothèse d'une courbe unique des débits, pour cette source d'Armentières, est, en tout cas, assez approchée ; car M. Maillet n'a pas relevé, entre la formule empirique (103) et les débits d'été observés depuis 1887, des écarts excédant une vingtaine de litres, c'est-à-dire environ 3,5 pour 100 du débit moyen.

[2] On peut y ajouter celui de la Dhuis, d'après une note de la page 71.

série d'exponentielles e^{-mt}, même en dehors des temps de sécheresse et du semestre d'été, mais à la condition d'y tenir compte des affluences de pluie par la méthode exposée au § IV.

ERRATA.

—

A la page 18, la conservation des valeurs de h, quand on multiplie H par k^2 et x, y, dx, dy, dn par k, résulte plus directement, et tout aussi simplement, de l'équation indéfinie (2), devenue linéaire, que des équations mêmes de cette page 18.

A la page 20, ligne 1, *rétablir* l'accent (′) de la lettre C, enlevé par la presse.

A la page 26, dernière ligne, *rétablir* de même $\frac{d.\zeta^2}{dr}$.

A la page 33, ligne 16, *au lieu de* comme nous le désirons, *lire* à moins d'éliminations compliquées.

A la page 37, ligne 18, *au lieu de* faible, *lire* faibles.

A la page 48, ligne 17, *au lieu de* $-k$, *lire* $-k'$.

A la page 49, ligne 15, l'expression indiquée de la conductibilité extérieure devrait être diminuée de la dérivée en τ de la capacité, pour que cette dernière pût, multipliée par la température ε, *figurer*, au premier membre, *sous le signe de différentiation en* τ, *comme elle doit normalement le faire*. Car la capacité est, à proprement parler, le coefficient qui, en multipliant la température, donne la quantité de chaleur par unité ou de volume, ou (ici) de surface, savoir, cette quantité dont la différentielle en τ égale justement la chaleur gagnée d'un instant à l'autre par la même unité ou de volume, ou de surface, et à laquelle correspondent les autres termes de l'équation. Il s'agit là seulement, il est vrai, de questions de mots, mais non sans importance pour la clarté du discours.

Aux pages 63, ligne 3 en remontant, et 65, ligne 9 en remontant, il y aurait lieu à une observation analogue.

Rationalité d'une loi expérimentale de M. Parenty pour l'écoulement des gaz par les orifices;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

I. On sait que, dès 1839, de Saint-Venant et Wantzel ont constaté [1], dans l'écoulement de l'air à travers des orifices non capillaires, sous de fortes différences de pression, un mode de détente sensiblement identique à celui que Laplace avait reconnu se produire dans les vibrations sonores et que l'on a appelé depuis *adiabatique*, mode où chaque particule gazeuse, changeant de volume sans gain ni perte de chaleur par sa surface, exerce une pression p proportionnelle à la puissance, ρ^n, de sa densité ρ, dont l'exposant n est le rapport (1,4 environ) des deux capacités calorifiques du gaz à pression constante et à volume constant. Ils avaient, de plus, en acceptant l'hypothèse d'une section contractée invariable σ, au voisinage de laquelle (un peu après l'orifice) la *veine* pourrait être censée cylindrique sur une très petite longueur, démontré que le débit atteignait sa plus forte valeur possible dès que la pression d'*aval*, alors transmise à cette section σ, s'abaissait aux 53 centièmes environ de la pression p_0 d'*amont*, et constaté que, dès lors, l'écoulement se maintient invariable, ou ne dépend plus des abaissements ultérieurs de la pression

[1] *Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air, déterminé par des différences de pression considérables*, au *Journal de l'École Polytechnique*, XXVIIe Cahier; 1839.

dans le réservoir d'aval; d'où ils avaient conclu la non-propagation de ces abaissements jusqu'à la section contractée.

En 1886, Hugoniot [2] a complété l'explication élémentaire de cette absence de propagation, en observant que la vitesse d'écoulement qui fournit le débit maximum égale précisément celle de propagation du son dans les tranches constituant la petite partie cylindrique de la veine; en sorte que l'onde *ascendante* qui tend à y propager vers la section contractée tout petit abaissement ultérieur de la pression d'aval, est emportée, avec la veine même, aussi vite qu'elle y progresse et ne parvient plus jusqu'à la section contractée.

II. Le principe de D. Bernoulli donne, dans cette question, pour la vitesse V d'écoulement à travers la section contractée σ où la pression est p et la densité ρ, vitesse due à l'abaissement $p_0 - p$ de la pression, à partir du réservoir d'amont (où la densité est ρ_0), la formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{V^2}{2} &= \int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0^n}\int_{p=p}^{p=p_0} \frac{d.\rho^n}{\rho} \\ &= \frac{p_0}{\rho_0}\,\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1}\right] = \frac{p_0}{\rho_0}\,\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Le carré de la masse gazeuse débitée dans l'unité de temps, égal, par unité d'aire de la section contractée, au produit $\rho^2 V^2$ ou $\rho_0^2\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{n}} V^2$, est, dès lors,

$$(2)\qquad 2p_0\rho_0\frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right].$$

Et son maximum correspond au rapport $\frac{p}{p_0}$ qui annule la dérivée en p de ce carré, savoir, à

$$(3)\qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

---

[2] *Sur l'écoulement des fluides élastiques*, aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CIII, 20 décembre 1886, p. 1153.

En y substituant 1, 4 ou $\frac{7}{5}$ à n, il vient donc, pour le rapport spécial de la pression p d'aval à celle d'amont p_0, au-dessous duquel l'écoulement devient invariable, par suite de la non-transmission jusqu'à σ des abaissements ultérieurs de cette pression p,

$$(4) \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{7}{2}} = 0,5283.$$

Donc, jusqu'à ce que ce maximum soit atteint, *le débit, par unité d'aire de la section contractée,* sera la racine carrée de l'expression (2), où p désignera la pression *donnée* s'exerçant dans le réservoir d'aval; et, divisé par ρ_0, ou *réduit en volume de gaz à la pression p_0 du réservoir d'amont,* il *vaudra*

$$\sqrt{2\frac{p_0}{\rho_0}}\sqrt{\frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]}.$$

On peut l'écrire, par analogie avec la formule usuelle de l'écoulement des liquides,

$$K\sqrt{2gh_0},$$

si l'on appelle h_0 la hauteur $\frac{p_0}{\rho_0 g}$ de gaz, à la pression p_0, qui produirait statiquement cette pression, et si l'on pose

$$(5) \qquad K = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]}.$$

Introduisons dans l'expression de K, au lieu du rapport $\frac{p}{p_0}$ des deux pressions d'aval et d'amont, la *détente relative* correspondante

$$\Delta = \frac{p_0 - p}{p_0}$$

du gaz; et nous aurons ce qu'on peut appeler le *coefficient théorique*

du débit par unité d'aire de la section contractée :

$$(6)\qquad K = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left[(1-\Delta)^{\frac{2}{n}} - (1-\Delta)^{\frac{n+1}{n}}\right]}\quad (^1).$$

III. Comme la détente Δ n'excédera pas la fraction $1 - 0,528\ldots$, soit $0,47$ environ, les deux puissances $(1-\Delta)^{\frac{2}{n}}$, $(1-\Delta)^{\frac{n+1}{n}}$ peuvent être développées, par la formule du binome, en séries assez rapidement convergentes. Elles donnent immédiatement, pour leur différence, le produit de $\frac{n-1}{n}\Delta$ par la série

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & 1 - \frac{3}{2n}\Delta + \frac{7-5n}{2.3n^2}\Delta^2 + \frac{(8-4n)(3n-2)-(n+1)(2n-1)}{2.3.4n^3}\Delta^3 \\ & + \frac{(8-4n)(3n-2)(4n-2)-(n+1)(2n-1)(3n-1)}{2.3.4.5n^4}\Delta^4 \\ & + \frac{(8-4n)(3n-2)(4n-2)(5n-2)-(n+1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{2.3.4.5.6n^5}\Delta^5 + \ldots \end{aligned}\right.$$

On voit la loi générale de formation des termes non écrits explicitement.

Dédoublons, dans tous les termes qui suivent les trois premiers écrits, le facteur $8 - 4n$ en $7 - 5n$ et $n + 1$. De plus, appelons ν, pour abréger, la différence $n - 1$; ce qui permettra de remplacer au besoin les facteurs $3n - 2$, $4n - 2$, $5n - 2$, ... par $2n - 1 + \nu$, $3n - 1 + \nu$, $4n - 1 + \nu$, ... Alors l'expression (7) deviendra

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & 1 - \frac{3}{2n}\Delta \\ & + \frac{7-5n}{2.3n^2}\Delta^2\left[1 + \frac{3n-2}{4n}\Delta + \frac{(3n-2)(4n-2)}{4.5n^2}\Delta^2 + \frac{(3n-2)(4n-2)(5n-2)}{4.5.6n^3}\Delta^3 + \ldots\right] \\ & + \frac{n^2-1}{2.3.4n^3}\Delta^3\left[1 + \frac{(2n-1+\nu)(3n-1+\nu)-(2n-1)(3n-1)}{5n\nu}\Delta\right. \\ & \qquad\qquad \left. + \frac{(2n-1+\nu)(3n-1+\nu)(4n-1+\nu)-(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{5.6n^2\nu}\Delta^2 + \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

Elle comprend, outre ses deux premiers termes, deux séries distinctes ayant en facteur, l'une, $\frac{7-5n}{2.3n^2}\Delta^2$, l'autre, $\frac{n^2-1}{2.3.4n^3}\Delta^3$.

---

(1) Dans le cas d'un liquide, il faudrait faire ρ constant, ou n infini; ce qui donnerait $K = \sqrt{\Delta}$, conformément à la formule usuelle de l'Hydraulique.

Cela posé, attribuons à n sa valeur effective $\frac{7}{5}$ chez les gaz, valeur, pour le moins très approchée dans les cas de l'hydrogène, de l'air, etc., qui donne $7 - 5n = 0$. La première des deux séries disparaîtra; et la deuxième, affectée de son coefficient total dans (8), deviendra

$$(9) \qquad \frac{5\Delta^3}{7^3}\left(1 + \frac{27}{35}\Delta + \frac{27}{70}\Delta^2 + \frac{984}{7^4}\Delta^3 + \frac{5211}{7^5}\Delta^4 + \ldots\right).$$

Mettons-y pour Δ son maximum 0,47; nous aurons, comme plus forte valeur possible de cette série,

$$0{,}00151 \times (1 + 0{,}363 + 0{,}085 + 0{,}043 + 0{,}015 + \ldots),$$

c'est-à-dire un quatre-centième à peine d'unité, alors que l'ensemble, $1 - \frac{3}{2n}\Delta$, des deux premiers termes de l'expression (8) est environ 0,504 ou 200 fois supérieur. Et comme il faudra extraire finalement la racine carrée de l'expression (8), pour en porter dans (6) la valeur multipliée par $\sqrt{\frac{n-1}{n}\Delta}$ et par $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$, l'erreur relative, entraînée par la suppression de cette série dans (8), se trouvera réduite de moitié et s'abaissera à un quatre-centième, bien au-dessous des erreurs d'observation.

IV. Donc, l'expression théorique (6) du coefficient K de débit équivaut *pratiquement*, du moins pour les gaz parfaits, à la formule très simple, *représentant l'ordonnée d'une ellipse presque circulaire*, où Δ serait l'abscisse,

$$(10) \qquad K = \sqrt{\Delta\left(1 - \frac{3}{2n}\Delta\right)} = \sqrt{\Delta\left(1 - \frac{15}{14}\Delta\right)};$$

et celle-ci est applicable pour toutes les valeurs possibles de la détente Δ entre le réservoir d'amont et la section contractée, c'est-à-dire sur la longueur d'un quart d'ellipse, depuis $\Delta = 0$ jusqu'à $\Delta = 0{,}47$ environ.

L'approximation très suffisante de cette formule ressort de ce fait, qu'on en déduit une dérivée de K^2 en Δ s'annulant, ou rendant K

maximum, pour $\Delta = \frac{7}{15} = 0,467$, alors que la valeur exacte serait $\Delta = 1 - 0,528\ldots = 0,471\ldots$, c'est-à-dire, *pratiquement*, la même chose, mais, surtout, de ce que le maximum approché ainsi obtenu est $K = \sqrt{\frac{7}{30}} = 0,4830$, tandis que le maximum rigoureux de K est, d'après (3) et (5),

$$(11) \qquad \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{5^2\sqrt{70}}{2.6^3} = 0,4842,$$

c'est-à-dire plus grand d'environ sa quatre-centième partie seulement. On pouvait, d'ailleurs, s'y attendre, après l'évaluation donnée à la fin du n° III, qui indiquait déjà un pareil excédent, bien insensible, de la valeur exacte.

V. C'est par un calcul précis de nombreux résultats d'observation, accompagné de la représentation graphique, au moyen d'une courbe qui s'est trouvée être le quart d'une ellipse presque circulaire, des valeurs de K en ressortant, que M. Henri Parenty a été conduit à la formule (10), dans la question de l'écoulement non seulement des gaz, mais aussi de la vapeur d'eau, sur laquelle il a fait beaucoup d'expériences [1]. On voit que, du moins pour les gaz, cette formule si simple n'est qu'une excellente réduction de l'ancienne et belle formule théorique due à de Saint-Venant et Wantzel.

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXIII, p. 184; 27 juillet 1891. *Voir* aussi, aux *Annales des Mines* (novembre 1902), son Mémoire intitulé *Observations sur les expériences de M. Rateau concernant le débit de la vapeur et leur concordance avec les formules de M. Parenty*. Observons, toutefois, que M. Parenty fait varier dans une certaine mesure, en sens inverse du coefficient m de contraction, notre coefficient constant $\frac{3}{2n}$, de manière à corriger le mieux possible l'hypothèse imparfaite, qu'implique la théorie, d'une contraction invariable pour chaque dispositif d'orifice. C'est, naturellement, dans le cas d'un orifice bien évasé, ou de m très voisin de 1, que la théorie s'applique le mieux. Pour un orifice en mince paroi, il prend $m = 0,632$ et porte jusqu'à près de 2,2 notre coefficient $\frac{3}{2n}$.

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la théorie des groupes continus;

Par M. A. BUHL,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Objet du Mémoire. — Parmi les équations linéaires aux dérivées partielles on peut remarquer celles dont le premier membre est une forme linéaire à coefficients constants de certains produits symboliques d'opérateurs qui, considérés en eux-mêmes, définissent les transformations infinitésimales d'un groupe continu. Ainsi toutes les équations à coefficients constants, au sens ordinaire de cette expression, sont formées à l'aide des opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \ldots$$

d'un groupe de translations dans l'espace général. De même la célèbre équation d'Euler et Poisson

$$(x-y)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - n(x-y)\frac{\partial z}{\partial x} + m(x-y)\frac{\partial z}{\partial y} - pz = 0$$

s'écrit

$$XY(z) - nX(z) + (m-1)Y(z) - pz = 0;$$

si l'on pose

$$X(\ ) = (x-y)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y(\ ) = (x-y)\frac{\partial}{\partial y},$$

ces deux derniers opérateurs définissant, comme on le voit immédiatement, un groupe projectif d'une très grande simplicité, on a

$$XY - YX = X + Y.$$

Les équations de cette nature ont des propriétés entre lesquelles, à mon avis, il convient de faire des distinctions essentielles, suivant qu'elles résultent du choix des opérateurs composant le premier membre, indépendamment de la façon dont ces opérateurs y sont assemblés, soit qu'elles résultent de la forme de l'assemblage. Le but de ce Mémoire est d'étudier surtout les premières propriétés. J'y montrerai notamment que, lorsque l'on connaît une solution de telles équations, quelque particulière qu'elle puisse être, on peut, en général, en déduire une solution contenant des fonctions arbitraires. En de nombreux points de cette étude je retrouverai et utiliserai des idées dues à l'admirable géomètre que fut Sophus Lie.

I. — Quelques remarques sur les équations à coefficients constants.

1. Je vais passer rapidement sur certaines propriétés connues des équations à coefficients constants, car ces propriétés auront une extension toute naturelle dans la suite pour des équations plus générales. Toutes ces équations admettent une solution de la forme

$$(1) \qquad e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots},$$

les α étant liés par une équation algébrique, dite *équation caractéristique*, que l'on forme immédiatement en portant l'expression précédente dans le premier membre de l'équation donnée. Cette solution si simple contient pourtant en germe les innombrables solutions que donnent les méthodes de Cauchy et dont la Physique mathématique fait un si grand usage. J'insisterai sur le fait que, pour en déduire toutes ces dernières, nous ne nous appuierons plus que sur les propriétés des opérateurs

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \cdots$$

qui ne dépendent en rien de la façon dont ils sont assemblés pour constituer le premier membre de l'équation donnée.

Du fait que les opérateurs (2) sont permutables résulte cette propriété que je considère comme absolument fondamentale : *Toutes les dérivées partielles d'une solution d'une équation linéaire à coefficients constants sont également des solutions.* C'est, en effet, évident, puisque porter la dérivée partielle d'une solution dans l'équation proposée revient à appliquer l'opérateur de cette dérivation partielle au premier membre de ladite équation.

Une autre propriété, encore bien évidente, des équations à coefficients constants est que la substitution

$$(3) \qquad x_1 \,|\, x_1 + \theta_1, \quad x_2 \,|\, x_2 + \theta_2, \quad \ldots,$$

où les θ sont des constantes arbitraires, change une solution en une autre. Une telle substitution change, en effet, les opérateurs (2) en eux-mêmes. Mais je considère comme essentiel de montrer que cette seconde propriété n'est pas forcément distincte de la première. Considérons pour cela l'opérateur

$$\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots.$$

D'après la première propriété, et attendu qu'il s'agit d'une équation linéaire, il transforme une solution en une autre, et il en est de même de tous les produits symboliques de tels opérateurs et de toutes les combinaisons linéaires de tels produits. En particulier, la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} \left(\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots\right)^{(n)} f$$

sera une solution si la fonction f en est une. Or cette série n'est autre que la formule de Taylor pour le cas de plusieurs variables et si toutes les dérivées partielles de f ont un sens et sont, par suite, de véritables solutions de l'équation aux dérivées partielles considérée, la formule précédente aura également un sens et représentera en général

$$f(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta_2, \ldots).$$

Cette propriété n'est donc pas distincte de la propriété fondamentale soulignée tout à l'heure. Elle permet de transformer la solution (1) en

$$e^{\alpha_1(x_1-\theta_1)+\alpha_2(x_2-\theta_2)+\cdots}.$$

Or cette solution en reste encore une si on la multiplie par n'importe quelle fonction des α et des θ et même par les différentielles $d\alpha$ et $d\theta$. Intégrer entre des limites quelconques une telle expression, c'est encore faire une somme de solutions. Finalement nous parvenons à une expression telle que

$$(4) \qquad \int F(\alpha, \theta)\, e^{\Sigma\alpha(x+\theta)}\, \Pi\, d\alpha\, d\theta.$$

C'est une intégrale multiple qui, par rapport aux α, doit être prise le long de la variété algébrique définie dans l'espace général par l'équation caractéristique, et une intégrale définie multiple à limites arbitraires par rapport aux θ.

On voit immédiatement que cette solution comprend, comme je l'ai annoncé, toutes les solutions déduites de la formule de Fourier, cette formule étant comprise dans l'expression ci-dessus. Le procédé de Cauchy, qui est vraisemblablement le plus avantageux pour la Physique mathématique, consiste à résoudre l'équation caractéristique par rapport à l'une des variables α. Plus généralement, on pourrait exprimer les coordonnées α de la surface caractéristique en fonction d'autres paramètres qu'eux-mêmes moins un seul. Mais mon but n'est pas de m'engager dans ces recherches. J'ai voulu simplement montrer que toutes les solutions comprises dans la formule (4) découlaient seulement de l'existence de la solution (1) et du lemme fondamental mentionné plus haut.

On verra plus loin qu'en exposant les choses comme je viens de le faire, elles se laissent généraliser de la façon la plus naturelle pour des équations à coefficients non constants. Pour donner un exemple aussi simple que possible de solutions déduites de la formule (4), je l'appliquerai à la formation de solutions qui se présentent sous forme de séries entières.

2. *De certaines solutions transcendantes entières.* — Pour

m'écarter le moins possible des notations de Cauchy, je considérerai l'équation

$$\begin{aligned} 0 = af + a_0 \frac{\partial f}{\partial t} + \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ + a_{00} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \sum a_{0i} \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial x_i} + \sum a_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k} + \ldots, \end{aligned}$$

où une variable t est spécialement mise en évidence, puis la solution

$$e^{\rho t + \Sigma \alpha_i x_i} \quad \text{ou} \quad e^{\rho(t-t_0) + \Sigma \alpha_i (x_i - \theta_i \sqrt{-1})},$$

où ρ est une fonction des α définie par l'équation caractéristique

$$0 = a + a_0 \rho + \sum a_i \alpha_i + a_{00} \rho^2 + \rho \sum a_{0i} \alpha_i + \sum a_{ik} \alpha_i \alpha_k + \ldots,$$

que, pour plus de symétrie, j'écrirai

$$0 = P_n + P_{n-1} \rho + P_{n-2} \rho^2 + \ldots + P_2 \rho^{n-2} + P_1 \rho^{n-1} + P_0 \rho^n,$$

P_k étant un polynome en α de degré k. P_0 est donc la simple constante $a_{00\ldots0}$, coefficient de $\frac{\partial^n f}{\partial t^n}$. Nous supposerons d'abord expressément que cette constante n'est pas nulle. L'expression

$$(5) \qquad \int F(\theta_1 \sqrt{-1}, \theta_2 \sqrt{-1}, \ldots) e^{\rho(t-t_0) + \sqrt{-1} \sum \alpha_i \left(\frac{x_i}{\sqrt{-1}} - \theta_i\right)} \Pi \frac{d\alpha\, d\theta}{2\pi},$$

formée comme à l'habitude, les intégrales ayant des limites convenables, se réduit pour $t = t_0$ à la formule de Fourier qui représente $F(x_1, x_2, \ldots)$, c'est-à-dire à une fonction arbitraire des variables x. Je vais établir que *la somme des n expressions précédentes, formées en attribuant successivement à ρ, les n valeurs des racines de l'équation caractéristique, est une solution développable en série entière de l'équation aux dérivées partielles primitive.* On a tout d'abord

$$e^{\rho(t-t_0)} = 1 + \frac{t-t_0}{1!} \rho + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \rho^2 + \ldots.$$

Donnons à ρ les n valeurs en question et sommons, il vient

$$(6) \qquad s_0 + \frac{t-t_0}{1!} s_1 + \frac{(t-t_0)^2}{2!} s_2 + \ldots,$$

s_k désignant la somme des $k^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation caractéristique, c'est-à-dire des fonctions symétriques bien connues et faciles à former. s_0 est la simple constante n, tandis que $s_1, s_2, \ldots$ sont des polynomes en α. Substituant alors la série (6) à la place de $e^{\rho(t-t_0)}$ dans la formule (5), il nous vient une série où l'on peut d'abord mettre tous les $\frac{(t-t_0)^n}{n!}$ en avant des intégrales. Et quant aux intégrales qui jouent le rôle de coefficients, la première, au facteur s_0 près, est $F(x_1, x_2, \ldots)$ et toutes les autres se déduisent de cette dernière fonction par des combinaisons linéaires de dérivations partielles, car, en admettant que les intégrales

$$(7) \qquad \int F(\theta_1\sqrt{-1}, \theta_2\sqrt{-1}, \ldots) s_k e^{\Sigma\alpha_i(x_i-\theta_i\sqrt{-1})} \Pi \frac{d\alpha\, d\theta}{2\pi}$$

aient toutes un sens pour les différentes valeurs de l'indice k, il est clair que ces polynomes s_k apparaîtront sous les signes sommatoires, même s'ils n'y figurent pas d'abord, en faisant une suite convenable de dérivations par rapport à $x_1, x_2, \ldots$ et en formant une fonction linéaire de ces dérivées partielles. Les exemples donnés plus loin éclairciront d'ailleurs tout ceci et nous verrons que les solutions en forme de séries entières que nous sommes en train de rattacher au type unique considéré en commençant sont celles que donne la méthode des coefficients indéterminés. A ce propos, je puis montrer tout de suite que, dans la solution que nous venons de définir et que je représenterai par

$$(8) \qquad S_0(F) + \frac{t-t_0}{1!} S_1(F) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} S_2(F) + \ldots$$

une loi de récurrence se manifeste immédiatement quant à la formation des opérateurs S. Lorsqu'il s'agit de calculer les sommes de puissances semblables s_k des racines de l'équation caractéristique, on peut, par exemple, employer les formules de Newton jusqu'au calcul de s_{n-1} inclusivement. Au delà nous avons les formules récurrentes

$$P_0 s_{n+i} + P_1 s_{n+i-1} + \ldots + P_{n-1} s_{i+1} + P_n s_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

En multipliant cette égalité par

$$F(\theta_1\sqrt{-1}, \theta_2\sqrt{-1}, \ldots)e^{\Sigma\alpha_i(x_i-\theta_i\sqrt{-1})}\Pi\frac{d\alpha\, d\theta}{2\pi}$$

et intégrant toujours sous les mêmes conditions, nous voyons reparaître des intégrales de la forme (7) contenant de plus sous les signes sommatoires les polynomes en α que sont les P à l'exception de P_0 qui est une simple constante. L'égalité obtenue peut s'écrire symboliquement

$$(9) \qquad P_0 S_{n+i} + (P_1)S_{n+i-1} + \ldots + (P_{n-1})S_{i+1} + (P_n)S_i = 0,$$

les (P) représentant des opérateurs à définir une fois pour toutes et qui permettent de calculer S_{n+i} pour toutes les valeurs de i, c'est-à-dire tous les termes de la série (8) dès que l'on connaît les n premiers.

J'ai à revenir maintenant sur le lemme fondamental du début de ce Chapitre, lequel va nous donner des résultats d'un nouvel intérêt.

Une solution telle que (8) étant obtenue, ses dérivées partielles où l'on changerait la fonction F ne seraient-elles pas de nouvelles solutions distinctes de (8)?

La réponse est négative pour les dérivations partielles par rapport aux variables x, elle est affirmative pour les dérivations partielles par rapport à t. Dans le premier cas, en effet, tout revient à substituer à F une dérivée partielle de F et comme F est arbitraire cela n'augmente en rien la généralité. Dans le second, au contraire, les nouveaux coefficients S obtenus ne peuvent ainsi se ramener à ceux de la série primitive. Cela n'est vrai toutefois que jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivation inclusivement. Par des dérivations successives par rapport à t formons, en effet, les n solutions

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_0 \quad (F_1) + \frac{t-t_0}{1!}S_1(F_1) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}S_2 \quad (F_1) + \ldots, \\ S_1 \quad (F_2) + \frac{t-t_0}{1!}S_2(F_2) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}S_3 \quad (F_2) + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ S_{n-1}(F_n) + \frac{t-t_0}{1!}S_n(F_n) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}S_{n+1}(F_n) + \ldots, \end{array} \right.$$

où $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des fonctions arbitraires. Je dis qu'en dérivant une fois de plus et désignant par F_{n+1} une nouvelle fonction arbitraire, la solution obtenue

$$S_n(F_{n+1}) + \frac{t-t_0}{1!} S_{n+1}(F_{n+1}) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} S_{n+2}(F_{n+1}) + \ldots$$

n'est pas distincte des précédentes. Pour le voir, il suffit d'appliquer aux $n+1$ séries précédentes respectivement les opérateurs (P_n), $(P_{n-1}), \ldots, (P_1), P_0$, puis de faire $F_1 = F_2 = \ldots = F_n = F_{n+1}$ dans les n premières. Ajoutant ensuite, en tenant compte de (9), il vient un résultat identiquement nul. Et, comme les opérateurs (P) sont permutables aux opérateurs S, on voit que notre dernière série est une somme des séries (10) où les fonctions arbitraires F sont modifiées d'une certaine manière.

Cette démonstration se pourrait évidemment répéter indéfiniment.

Nous sommes donc arrivés en dernière analyse à déduire de la solution (1) les n solutions (10) dont la somme, plus généralement, est une fonction transcendante entière de t contenant n fonctions arbitraires.

3. *Exemples.* — Soit d'abord l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Posant $f = e^{\alpha x + \beta y}$, il vient l'équation caractéristique $\alpha - \beta = 0$, que je résoudrai par rapport à α. Donc $s_0 = 1$, $s_1 = \beta$, $s_2 = \beta^2$, ... et, par suite, en faisant pour simplifier $x_0 = 0$, il vient la solution

$$F(y) + \frac{x}{1!} F'(y) + \frac{x^2}{2!} F''(y) + \ldots,$$

qui, lorsque le choix de la fonction arbitraire $F(y)$ lui fait représenter $F(x+y)$, n'est autre que le développement taylorien de cette fonction arbitraire de $x+y$ que donnent les considérations élémentaires bien connues de la théorie des équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre.

Prenons maintenant l'équation bien connue de la théorie de la pro-

pagation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

L'équation caractéristique $\alpha^2 - \beta = 0$ résolue par rapport à α donne $s_0 = 2$, $s_{2i} = 2\beta^i$,, $s_{2i+1} = 0$, d'où la solution

$$F(y) + \frac{x^2}{2!}F'(y) + \frac{x^4}{4!}F''(y) + \ldots$$

qui, dérivée par rapport à x, donne cette autre

$$\frac{x}{1!}\Phi(y) + \frac{x^3}{3!}\Phi'(y) + \frac{x^5}{5!}\Phi''(y) + \ldots.$$

Si l'on avait résolu l'équation caractéristique par rapport à β, on aurait trouvé la solution

$$\Psi(x) + \frac{y}{1!}\Psi''(x) + \frac{y^2}{2!}\Psi^{\text{IV}}(x) + \ldots.$$

Toutes trois sont données par M. P. Appell, dans le Mémoire intitulé : *Sur l'équation $r - q = 0$ et la théorie de la chaleur* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII, 1892, p. 187), et par M. H. Laurent (*Traité d'Analyse*, t. VI, p. 192). Si l'on prend pour fonctions arbitraires des polynomes, les séries ci-dessus se réduisent aussi à des polynomes, comme le remarque M. Appell. Les dérivées partielles de ces polynomes donnent d'autres polynomes qui sont encore des solutions. Les séries ci-dessus peuvent ne pas être convergentes. Ainsi la dernière ne peut représenter une fonction se réduisant à $\frac{1}{1-x}$ pour $y = 0$, car, pour cette valeur de $\Psi(x)$, elle est divergente, résultat donné par Mme Kowalevski. (P. Appell, *loc. cit.*, p. 188 et 206.)

Soit encore, comme exemple, l'équation de la propagation du son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

L'équation caractéristique $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ donne $\alpha = \pm\beta$, d'où $s_0 = 2$, $s_{2i} = 2\beta^{2i}$, $s_{2i+1} = 0$. On a donc la solution

$$F(y) + \frac{x^2}{2!}F''(y) + \frac{x^4}{4!}F^{\text{IV}}(y) + \ldots,$$

puis, par dérivation, par rapport à x, cette autre

$$\frac{x}{1!}\Phi(y)+\frac{x^3}{3!}\Phi''(y)+\frac{x^5}{5!}\Phi^{\text{IV}}(y)+\ldots.$$

En remplaçant d'abord Φ par F, puis F par Φ et additionnant et retranchant, on aurait un développement pouvant représenter la solution bien connue $F(x+y)+\Phi(x-y)$. Soit enfin l'équation de la théorie du potentiel

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

On a

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0,$$

d'où

$$\alpha=\pm i\sqrt{\beta^2+\gamma^2},\qquad s_0=2,\qquad s_{2i}=2(-1)^i(\beta^2+\gamma^2)^i,\qquad s_{2i+1}=0,$$

d'où la solution

$$F(yz)-\frac{x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)+\frac{x^4}{4!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)^{(2)}-\ldots,$$

où les exposants des parenthèses indiquent des puissances symboliques. Par dérivation, on a

$$\frac{x}{1!}\Phi(yz)-\frac{x^3}{3!}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{z^2}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^{(2)}-\ldots.$$

La somme de ces deux séries, si l'on choisit des polynomes pour les fonctions arbitraires F et Φ, nous donne tous les polynomes sphériques (P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, p. 111; H. Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p. 41). Le fait que les dérivées partielles d'un polynome sphérique sont aussi des polynomes sphériques est évident d'après les théories précédemment développées. On peut remarquer ici que le fait, pour les équations qui nous occupent, d'admettre des polynomes pour solutions n'est nullement le privilège de l'équation de Laplace ou de celle de la théorie de la propagation de la chaleur; il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que les séries entières qui satisfont à ces équations aient pour coefficients des

opérateurs aux dérivées partielles susceptibles d'annuler, lorsque leur ordre s'élève, des polynomes arbitraires d'ordre inférieur.

4. *Cas où l'équation caractéristique, relative à une équation d'ordre n, n'est pas du degré n.* — Dans tout ce qui précède, le coefficient P_0, du terme de degré le plus élevé de l'équation caractéristique, n'est pas nul, si bien que l'équation aux dérivées partielles contient toujours le terme $\frac{\partial^n f}{\partial t^n}$. D'après les théorèmes généraux de Cauchy et de Mme de Kowalevski, les solutions précédemment trouvées, qui contiennent n fonctions arbitraires et se peuvent réduire à des fonctions arbitraires, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, ont une existence dont la légitimité était pour ainsi dire assurée à l'avance (E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 17 et 23). Si P_0 ou, plus généralement, $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$ sont nuls, les choses vont changer et nos développements en séries entières ne subsisteront qu'avec une généralité moindre; en outre, les lois de formation des coefficients changent de nature d'une manière remarquable. Les fonctions symétriques s sont ici des fractions rationnelles en α, ayant pour dénominateurs des puissances de P_k et le développement (6) ne sera pas entier en α. Toutefois il sera possible de le multiplier par une puissance de P_k telle qu'il devienne entier jusqu'à un terme d'indice r arbitrairement choisi et, en transportant un tel développement dans l'intégrale (5), nous aurons une série où le coefficient de $\frac{(t-t_0)^r}{r!}$ pourra être considéré comme une fonction arbitraire et où les termes d'ordre inférieur, considérés à gauche du précédent, auront des coefficients que l'on déduira l'un de l'autre par des opérations fonctionnelles, analogues à celles qui se faisaient de gauche à droite dans les cas précédemment étudiés. Ce développement limité représentera asymptotiquement une solution toutes les fois que l'on pourra établir que, pour une valeur suffisamment grande de r, le reste de la série tend vers zéro. Ainsi, par exemple, l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - f = 0$$

admet, sous toutes les restrictions précédentes, la solution

$$F^{(r)}(y) + \frac{x}{1!}F^{(r-1)}(y) + \ldots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}F'(y) + \frac{x^r}{r!}F(y).$$

De telles anomalies sont déjà discutées par Cauchy et par Brisson, géomètre à peu près oublié aujourd'hui, si ce n'est justement par l'éloge qu'en fait Cauchy (*Œuvres complètes*, 2e série, t. VII, p. 198). Bien que le second cas méritât une étude tout aussi attentive que le premier, ce serait m'écarter trop de mon sujet que de m'arrêter ici davantage. J'ai seulement voulu montrer, par des exemples simples, comment les seules propriétés des opérateurs composant le premier membre d'une équation linéaire permettaient de déduire d'une solution très particulière d'autres solutions formant des classes très étendues. Nous allons maintenant généraliser ce qui précède pour des équations aux dérivées partielles à coefficients non constants.

II. — Équations aux opérateurs X.

5. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_r$ les r opérateurs :

$$(1) \qquad X_i(\quad) = \xi_{i1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_{i2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{ir}\frac{\partial}{\partial x_r},$$

qui définissent les transformations infinitésimales d'un groupe continu simplement transitif. Suivant les notations en usage, j'écrirai X_iX_k pour $X_i[X_k(\quad)]$ et (X_iX_k) pour $X_iX_k - X_kX_i$. Les opérateurs précédents déterminant par hypothèse un groupe, nous avons

$$(2) \qquad (X_iX_k) = \sum_s c_{iks}X_s,$$

les c_{iks} étant des constantes satisfaisant aux identités de Jacobi.

Nous pouvons imaginer que l'on forme une équation aux dérivées partielles avec les opérateurs X exactement comme les équations du Chapitre précédent étaient formées avec les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$. Par analogie, une telle équation pourrait s'appeler très justement *une équa-*

tion aux opérateurs X *à coefficients constants.* En nous tenant au second ordre, nous verrons facilement que sa forme la plus générale est

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}X_1^2 + 2\alpha_{12}X_1X_2 + 2\alpha_{13}X_1X_3 + \ldots + 2\alpha_{1r}X_1X_r \\ \qquad + \alpha_{22}X_2^2 + 2\alpha_{23}X_2X_3 + \ldots + 2\alpha_{2r}X_2X_r \\ \qquad\qquad + \alpha_{33}X_3^2 + \ldots + 2\alpha_{3r}X_3X_r \\ \qquad\qquad\qquad + \ldots + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_{rr}X_r^2 \\ \qquad + \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \ldots + \alpha_rX_r + \alpha f = 0, \end{array}\right.$$

les α, α_i, α_{ik} étant de simples coefficients constants. Au cas où il semblerait que la généralité du premier membre serait augmentée en y faisant figurer X_kX_i en même temps que X_iX_k la relation (2) montrerait qu'il n'en est rien, l'un de ces produits ne différant de l'autre que par des termes du premier ordre. Cette remarque porte immédiatement à se demander si l'on ne pourrait pas encore simplifier le premier membre de (3) en utilisant la relation (2). Nous verrons qu'il y a précisément des choses importantes à faire en ce sens, mais je préfère montrer tout de suite quelles sont les propriétés de l'équation (3) qui sont indépendantes de tout arrangement des opérateurs.

Au groupe simplement transitif (1) correspond un groupe simplement transitif de même nature, ces deux groupes sont dits *réciproques*. Leurs transformations sont permutables et leurs opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_r$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ vérifient par suite les relations $X_iY_k = Y_kX_i$ ou, en abrégé, $(X_iY_k) = 0$. (S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, p. 380.) Ces deux groupes sont semblables, c'est-à-dire que l'on peut passer de l'un à l'autre par un changement de variables. Je rappelle, en renvoyant toujours à l'Ouvrage de Lie pour les démonstrations, que, le groupe (1) étant donné par ses opérateurs X, on détermine le groupe réciproque en cherchant d'abord toutes les intégrales distinctes du système complet :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=r} \xi_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_r)\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{k=r} \xi_{ik}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_r)\frac{\partial f}{\partial x'_k} = 0, \\ (i = 1, 2, \ldots, r). \end{array}\right.$$

Ce système comprenant r équations à $2r$ variables admet $2r - r$, c'est-à-dire r intégrales distinctes. (E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 52. — S. Lie, *loc. cit.*, p. 88.) En égalant ces intégrales qui sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_r$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_r$ à r constantes C_1, $C_2, \ldots, C_r$, on a r relations entre les x et les x' qui définissent les transformations finies du groupe réciproque cherché. On passe ensuite à ses transformations infinitésimales $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ au moyen d'une des méthodes élémentaires bien connues. (S. Lie, *loc. cit.*, p. 77.)

Le fait que les opérateurs Y sont permutables à tous les opérateurs X entraîne qu'ils sont permutables à l'opérateur défini par tout le premier membre de l'équation (3) et, par suite, ils changent les solutions de cette équation en d'autres solutions.

Il en est évidemment de même de leurs combinaisons linéaires telles que $E = e_1 Y_1 + e_2 Y_2 + \ldots + e_r Y_r$, les e étant des constantes, et de toutes les sommes de produits symboliques de telles combinaisons. En particulier, la série symbolique

$$e^E = f + \frac{1}{1!} E(f) + \frac{1}{2!} E^2(f) + \ldots$$

est une solution de l'équation (3) si la fonction f en est une. Or cette série représente la fonction f sur laquelle on a effectué les transformations finies du groupe défini par les r opérateurs Y. (S. Lie, *loc. cit.*, p. 76, et H. Poincaré, *Cambridge philosophical Transactions*, Vol. XVIII, dédié à Sir G. Stokes, p. 220. *Voir* aussi *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XV, 1901, p. 323). Donc les transformations de notre groupe réciproque changent une solution de l'équation (3) en une autre contenant les r constantes arbitraires C. Si l'on multiplie cette dernière solution par une fonction arbitraire des C, puis par les éléments différentiels $dC_1, dC_2, \ldots, dC_r$ et si l'on forme l'intégrale multiple correspondante prise entre des limites constantes mais arbitraires, nous nous élèverons à des solutions dépendant de fonctions arbitraires.

Tout ceci est trop intimement lié aux méthodes de Lie pour que je m'y arrête davantage; je tiens seulement à faire remarquer que le raisonnement précédent est calqué mot pour mot sur celui fait au

Chapitre précédent à propos des équations à coefficients constants au sens ordinaire de l'expression. Nous avions alors les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}$ d'un groupe de translations qui coïncidait avec son groupe réciproque.

En résumé, ce qui précède peut être considéré comme une généralisation des méthodes de Cauchy.

6. *Analogies avec les véritables équations à coefficients constants.* — Puisque les équations à coefficients constants admettent toutes des solutions du type

$$S = e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r},$$

que les opérateurs constituant le premier membre transforment en

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \alpha_1 S, \qquad \frac{\partial S}{\partial x_2} = \alpha_2 S, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial S}{\partial x_r} = \alpha_r S,$$

il est naturel de se demander tout d'abord si des équations aux opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_r$ bien déterminés n'admettraient pas, indépendamment de la forme du premier membre, un type général de solutions S, tel que

$$(5) \quad X_1(S) = \alpha_1 S, \qquad X_2(S) = \alpha_2 S, \qquad \ldots, \qquad X_r(S) = \alpha_r S.$$

Si de telles relations pouvaient avoir lieu, elles permettraient évidemment d'achever de déterminer la fonction S au moyen d'une équation algébrique, tout comme pour les équations à coefficients constants. En posant $\log S = U$, les équations (5) peuvent s'écrire

$$(6) \quad X_1(U) = \alpha_1, \qquad X_2(U) = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad X_r(U) = \alpha_r$$

et, si elles admettent une solution U, le système

$$\begin{aligned}
T_1(U) &= X_1(U) + \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \\
T_2(U) &= X_2(U) + \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
T_r(U) &= X_r(U) + \alpha_r \frac{\partial U}{\partial t} = 0
\end{aligned}$$

doit admettre aussi une solution qui est $U - t$. Ces dernières équations forment un système de r équations à $r+1$ variables, première constatation compatible avec l'existence d'une solution mais seulement d'une. On a ensuite

$$(T_i T_k) = (X_i X_k) = \sum c_{iks} X_s.$$

Or

$$\sum c_{iks} T_s = \sum c_{iks} X_s + \frac{\partial U}{\partial t} \sum c_{iks} \alpha_s,$$

si bien que, si l'on a

$$(7) \qquad \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} \alpha_s = 0,$$

les $(T_i T_k)$ sont à considérer comme exprimables en fonction linéaire des T et l'existence d'une solution est définitivement assurée. Reste à savoir comment on peut satisfaire au système (7). En général, il semble devoir contenir plus d'équations que d'inconnues sauf pour $r = 2$ et $r = 3$, cas qui sont les plus intéressants. Mais, à supposer ces équations compatibles, elles pourront laisser certains α_s, par exemple α_σ, α_τ, ..., indéterminés si tous les $c_{ik\sigma}$, $c_{ik\tau}$, ... sont nuls. Cela arrive quand le groupe $X_1, X_2, \ldots, X_r$ contient un ou plusieurs sous-groupes invariants. En écartant tout d'abord cette hypothèse, il résulte de l'homogénéité des équations (7) qu'elles ne peuvent donner pour les α_s que des valeurs de la forme $h_1\alpha$, $h_2\alpha$, ..., $h_r\alpha$, α étant une constante indéterminée et la seule qui puisse l'être, et les h étant des coefficients numériques invariables. En d'autres termes, les équations (6) peuvent s'écrire

$$X_1\left(\frac{U}{\alpha}\right) = h_1, \qquad X_2\left(\frac{U}{\alpha}\right) = h_2, \qquad \ldots, \qquad X_r\left(\frac{U}{\alpha}\right) = h_r,$$

$\frac{U}{\alpha}$ étant une fonction qui ne peut absolument contenir que les variables x.

Prenons maintenant le cas d'un sous-groupe invariant. Pour fixer les idées, supposons que l'ensemble des opérateurs $X_2, \ldots, X_r$ constitue un sous-groupe invariant dans le groupe $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Cela

signifie que

$$(X_1, X_k) = c_{1k2}X_2 + c_{1k3}X_3 + \ldots + c_{1kr}X_r,$$

pour $k = 2, 3, \ldots, r$, et que $X_2, X_3, \ldots, X_r$ définissent, à eux seuls, un groupe à $r - 1$ paramètres qui est le sous-groupe invariant en question. Donc tous les c_{ik1} sont nuls et, par suite, α_1 est une constante indéterminée. La solution U du système (6) dépendra donc de deux constantes arbitraires. On établirait de même que, si le sous-groupe invariant est $X_m, X_{m+1}, \ldots, X_r$, la solution U dépend de m constantes arbitraires; l'une de ces constantes peut être simplement multiplicative.

Pour en revenir au problème général, nous supposerons donc que l'on a déterminé une solution U du système (6) contenant au moins une constante arbitraire multiplicative, d'où une solution $S = e^U$ du système (5). Cette solution S substituée dans l'équation (3) nous conduira à une équation algébrique liant les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Si ces dernières se réduisent à une seule, le fait de l'assujettir à vérifier l'équation entraînera que la solution S ne contiendra plus rien d'arbitraire du tout.

Nous allons voir maintenant comment S, quel que soit le nombre de constantes arbitraires que renferme cette solution, est généralisée par les transformations du groupe Y réciproque de X. Si U est une fonction satisfaisant au système (6), $U - U'$ satisfait au système complet (4), U' désignant une fonction absolument identique à U où les x sont remplacés par les x'. En d'autres termes $U - U'$ est une intégrale de (4) et, par suite, ne peut être autre chose qu'une fonction de r intégrales distinctes telles que celles considérées plus haut et égalées respectivement à des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_r$. Donc

$$U' = U + F(C_1, C_2, \ldots, C_r) \tag{8}$$

et, par suite, la solution $S = e^U$ de l'équation (3) est changée, par les transformations finies du groupe Y, en

$$e^{U + F(C_1, C_2, \ldots, C_r)}. \tag{9}$$

L'analogie de ce résultat avec celui trouvé pour les équations à coefficients constants du Chapitre précédent est évidente, mais il est

essentiel de remarquer qu'elle ne se poursuit pas forcément jusque dans son utilisation. Dans le premier cas, nous avons eu :

$$U = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r,$$
$$F(C_1, C_2, \ldots, C_r) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_r C_r;$$

ce qui nous a conduits à la formule de Fourier et aux résultats habituels qui en découlent et dont l'utilité est incontestable. Dans le second, rien ne nous permet d'affirmer que la fonction

$$F(C_1, C_2, \ldots, C_r)$$

ne va pas se scinder en une somme de plusieurs termes dont certains seront complètement indépendants des α, et à ces termes correspondraient, dans la solution (9), des fonctions des C simplement multiplicatives. Ainsi, dans le cas où le groupe X ne contient aucun sous-groupe invariant et où le système (6) ne peut admettre qu'une solution de la forme $U = \alpha V(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, d'où, pour l'équation (3), une solution $e^{\alpha V}$ où α cesse d'être arbitraire comme devant satisfaire à une équation algébrique, la solution (9) ne contient d'autres constantes arbitraires que les C et celles-ci y forment un simple facteur tel que si l'on multiplie par $dC_1, dC_2, \ldots, dC_r$ et intègre, tout revient à multiplier e^U par un facteur constant. Dans ce cas, la solution obtenue est à considérer comme inutile puisqu'elle ne contient rien d'arbitraire et que les méthodes précédentes ne peuvent la généraliser. Nous rencontrerons pareille singularité dans l'étude de l'équation d'Euler et Poisson, exemple qui d'ailleurs éclaircira ce qui précède.

7. Ces analogies plus ou moins nettes avec les équations à coefficients constants deviennent particulièrement remarquables dans le cas où toutes les constantes c_{iks} qui définissent la structure du groupe X sont nulles. Alors toutes les constantes α sont arbitraires et il existe un changement de variables ramenant l'équation (3) à une équation aux dérivées partielles à coefficients constants. Cela résulte du fait que les opérateurs X sont permutables et qu'on peut, en ce cas, les ramener aux opérateurs $\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_r}$. (S. Lie, *Theorie der*

Transformationsgruppen, t. I, p. 339.) Les formules de transformation s'obtiennent en égalant à des constantes arbitraires les r intégrales distinctes du système complet

$$(10) \qquad X_k(f) + \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

J'ai donné une application géométrique assez intéressante de ces considérations dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, (t. XXXI, 1903, p. 47). Il s'agissait de la détermination des surfaces dont un système d'asymptotiques se projette sur le plan yOx suivant la famille de courbes définie par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}.$$

Le problème conduit à l'équation

$$A^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2AB \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + B^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad X^2(f) - Y(f) = 0,$$

si l'on pose

$$X(f) = A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad Y(f) = X(A) \frac{\partial f}{\partial x} + X(B) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

En écrivant que ces deux opérateurs sont permutables, on trouve les conditions :

$$X^2(A) - Y(A) = 0, \qquad X^2(B) - Y(B) = 0.$$

Il faut donc que A et B soient des solutions de l'équation proposée pour qu'on puisse la ramener à la forme

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

On peut prendre, en particulier,

$$A = a + cx + dy, \qquad B = b + ex + gy,$$

a, c, d, b, e, g étant des constantes. Donc toutes les familles de courbes

définies par des équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + ex + gy}{a + ex + gy}$$

peuvent être prises pour projections d'un système d'asymptotiques de certaines surfaces dont la connaissance dépend de l'intégration de l'équation (11) bien connue dans la Théorie de la chaleur. M. L. Bianchi avait déjà fait connaître un cas particulier de ces considérations en montrant que la détermination des surfaces dont un système d'asymptotiques est situé sur des cylindres de révolution de même axe, se ramène à l'intégration de l'équation (11) ([1]). On voit que l'on peut remplacer les cylindres de M. Bianchi par tous ceux dont les sections droites rentrent dans les familles de courbes définies par l'équation différentielle précédente. Pour plus de détails, notamment au point de vue géométrique, je renvoie à ma Note précitée.

8. *Réduction à la forme régulière d'une équation aux opérateurs* X. — Ainsi qu'on l'a déjà remarqué au début du Chapitre, on peut se demander si, au moyen des relations fondamentales (2), on ne pourrait pas ramener l'équation (3) à une forme plus simple. La chose est non seulement possible, mais très aisée en s'appuyant sur le Calcul des polynomes symboliques exposé par M. H. Poincaré dans son Mémoire *Sur les groupes continus* (*Cambridge philosophical Transactions*, t. XVIII, dédié à sir G. Stokes à l'occasion de son jubilé, 1900). M. Poincaré dit que des polynomes formés d'opérateurs tels que X sont *équivalents* quand on peut les ramener l'un à l'autre au moyen des relations (2) et qu'ils sont *réguliers* quand ce sont des sommes de puissances de combinaisons linéaires telles que

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_r X_r;$$

il démontre ensuite qu'un polynome quelconque est toujours équivalent à un polynome régulier.

([1]) E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, p. 170.

Dans le cas particulier qui nous occupe, cette conclusion est à peu près évidente; le polynome symbolique que forme le premier membre de l'équation (3) peut se ramener à une somme de carrés symboliques et la régularisation peut encore s'éclaircir à l'aide d'une interprétation géométrique. On remarquera l'analogie avec la réduction à des sommes de carrés des formes quadratiques algébriques.

Dans l'espace général à r dimensions, prenons r axes rectangulaires d'origine O et r points dans ce même espace,

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} P_1(\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{1r}), \\ P_2(\beta_{21}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{2r}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_r(\beta_{r1}, \beta_{r2}, \ldots, \beta_{rr}); \end{array}\right.$$

les P désignent ces points, les parenthèses qui suivent contiennent les coordonnées de chacun.

Considérons tous les vecteurs OP_i et désignons leurs longueurs respectives par ρ_i. Nous avons, en désignant par la notation (ik) l'angle P_iOP_k,

$$\rho_k^2 = \beta_{k1}^2 + \beta_{k2}^2 + \ldots + \beta_{kr}^2,$$

$$\rho_i\rho_k \cos(ik) = \beta_{i1}\beta_{k1} + \beta_{i2}\beta_{k2} + \ldots + \beta_{ir}\beta_{kr}.$$

Avec ces notations, on peut écrire aisément l'identité

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} [\rho_1^2 X_1^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(12)X_1X_2 + \ldots + 2\rho_1\rho_r\cos(1r)X_1X_r \\ \qquad + \qquad \rho_2^2 X_2^2 \qquad + \ldots + 2\rho_2\rho_r\cos(2r)X_2X_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \rho_r^2 X_r^2] \\ = \sum\limits_{i=1}^{i=r}(\beta_{1i}X_1 + \beta_{2i}X_2 + \ldots + \beta_{ri}X_r)^2 \\ \quad + [\rho_1\rho_2\cos(12)(X_1X_2) + \rho_1\rho_3\cos(13)(X_1X_3) + \ldots + \rho_1\rho_r\cos(1r)(X_1X_r) \\ \qquad\qquad + \rho_2\rho_3\cos(23)(X_2X_3) + \ldots + \rho_2\rho_r\cos(2r)(X_2X_r) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \rho_{r-1}\rho_r(X_{r-1}X_r)]. \end{array}\right.$$

Le second membre de cette égalité se compose de la somme de

carrés symboliques mise en évidence et d'un crochet qui est tout entier du premier degré d'après les relations (2). Quant au polynome triangulaire du premier membre, ses coefficients sont quelconques; on peut, par suite, l'identifier avec le polynome de même nature qui figure dans le premier membre de (3). Il est ainsi démontré que le premier membre de l'équation (3) peut se ramener à une somme de carrés symboliques suivie d'une forme linéaire des opérateurs X.

Considérons les relations d'identification

$$\alpha_{ii} = \rho_i^2, \qquad \alpha_{ik} = \rho_i \rho_k \cos(ik).$$

Si nous exprimons les seconds membres en fonction des β_{ik}, il y a évidemment surabondance de ces derniers éléments qui sont au nombre de r^2 alors que les α_{ik} ne sont qu'au nombre de $\frac{r(r+1)}{2}$. Il est facile de faire disparaître cette surabondance, ce qui d'ailleurs simplifie encore les choses. Les coefficients ρ_i^2 et $\rho_i \rho_k \cos(ik)$ restent évidemment les mêmes si l'ensemble de tous les vecteurs OP est considéré comme un système invariable pouvant tourner autour du seul point fixe O. Amenons donc le vecteur OP_1 sur l'axe Ox_1, puis, par rotation autour de cet axe, le vecteur OP_2 dans le plan Ox_1x_2, puis, par rotation dans l'espace à quatre dimensions, le vecteur OP_3 dans l'espace $Ox_1x_2x_3$ et ainsi de suite. Il n'y aura plus finalement dans l'espace à r dimensions que le dernier vecteur OP_r et les points P auront alors des coordonnées plus simples que précédemment et que donne le Tableau ci-dessous :

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} P_1 & (\beta_{11}, & 0, & \ldots, 0, & 0), \\ P_2 & (\beta_{21}, & \beta_{22}, & \ldots, 0, & 0), \\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ P_{r-1} & (\beta_{r-1,1}, & \beta_{r-1,2}, & \ldots \beta_{r-1,r-1}, & 0), \\ P_r & (\beta_{r1}, & \beta_{r2}, & \ldots, \beta_{r,r-1}, & \beta_{rr}). \end{array} \right.$$

Les β_{ik} sont alors en même nombre que les α_{ik} et la généralité n'est évidemment diminuée en rien. Nous avons donc le résultat suivant : *Toute équation linéaire du second ordre aux opérateurs* $X_1, X_2, \ldots, X_r$ *d'un groupe continu simplement transitif peut être ramenée à*

la forme

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\beta_{11}X_1+\ldots+\beta_{r1}X_r)^2\\ &\quad+(\beta_{22}X_2+\ldots+\beta_{r2}X_r)^2+\ldots\\ &\quad+(\beta_{rr}X_r)^2+\beta_1X_1+\ldots+\beta_rX_r+\beta f=0. \end{aligned}\right.$$

En empruntant la terminologie de M. Poincaré, je dirai que *cette équation est régularisée, par rapport aux opérateurs* X, *suivant les vecteurs* OP.

9. *Équations régularisables dans l'espace à moins de r dimensions.* — L'équation régulière précédente contient r carrés symboliques, mais il peut arriver, pour certaines formes des coefficients de l'équation aux dérivées partielles qu'elle représente, qu'elle en contienne moins. Géométriquement on pourra toujours interpréter cela en ramenant les r points P dans un espace à moins de r dimensions.

A ce point de vue, la plus simple de toutes les équations est celle qui se régularise dans l'espace à une dimension. Tous les vecteurs OP sont alors confondus suivant une seule et même droite et il n'y a plus dans le premier membre de l'équation (15) que le premier carré symbolique. Telle est, par exemple, l'équation à deux variables $X^2-Y=0$ rencontrée plus haut et qui déterminait une surface par la projection d'un système d'asymptotiques. En se reportant aux expressions (1) des opérateurs X, on voit facilement que, dans toute équation régularisable suivant une seule et même droite, les coefficients des dérivées partielles

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

sont respectivement de la forme

$$A_{ii}^2,\quad 2A_{ii}A_{kk},\quad A_{kk}^2,$$

les A étant des formes linéaires à coefficients constants des ξ.

Après ces équations viennent celles qui sont régularisables dans un plan. Dans le Tableau (14), les deux premières colonnes de β sont les seules qui ne soient pas nulles et le premier membre de (15) se réduit à la somme des deux premiers carrés. Dans les équations de cette

nature, les dérivées partielles (16) sont respectivement

$$A_{1i}^2 + A_{2i}^2, \quad 2(A_{1i}A_{1k} + A_{2i}A_{2k}), \quad A_{1k}^2 + A_{2k}^2.$$

Plus généralement, soit une équation régularisable dans l'espace à m dimensions ($m < r$). Les coefficients des dérivées partielles (16) sont respectivement de la forme

$$\begin{aligned} &A_{1i}^2 + A_{2i}^2 + \ldots + A_{mi}^2, \\ &2(A_{1i}A_{1k} + A_{2i}A_{2k} + \ldots + A_{mi}A_{mk}), \\ &A_{1k}^2 + A_{2k}^2 + \ldots + A_{mk}^2, \end{aligned}$$

en posant

$$A_{ik} = \beta_{1i}\xi_{1k} + \beta_{2i}\xi_{2k} + \ldots + \beta_{ki}\xi_{rk}.$$

Pour $m = r$, on retrouve le cas général.

10. *Équations régularisables suivant des vecteurs orthogonaux.* — Si tous les vecteurs OP sont orthogonaux, on peut les considérer comme confondus avec les axes des coordonnées; il n'y a plus que les β_{ik} de la diagonale du Tableau (14) qui ne sont pas nuls et l'équation (15) prend la forme

$$(\beta_{11}X_1)^2 + (\beta_{22}X_2)^2 + \ldots + (\beta_{rr}X_r)^2 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_r X_r + \beta f = 0.$$

Si tous les β_{ii} sont égaux à 1, je dirai que l'équation est régularisée suivant des vecteurs orthogonaux unitaires. *Toute équation aux opérateurs* X *du type* (3) *peut être régularisée suivant des vecteurs orthogonaux unitaires.* Il suffit, en effet, de prendre pour nouveaux opérateurs les formes linéaires contenues dans les parenthèses du premier membre de (15); les deux groupes définis par les X ou par r formes linéaires à coefficients constants de ces mêmes opérateurs X ne sont pas distincts. Cette dernière réduction est certainement très avantageuse au point de vue de la simplicité de forme obtenue finalement pour le premier membre de l'équation, mais il faut observer que, au point de vue où nous nous sommes placés au début de ce Mémoire, cette simplicité importe moins que celle des opérateurs eux-mêmes.

11. *Régularisation d'une équation quelconque.* — Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, absolument quelconque, ce qui précède montre que l'on peut toujours réduire son premier membre à une somme de carrés symboliques d'opérateurs de la forme (1), somme suivie de termes du premier ordre formant un opérateur de même nature, car les expressions trouvées pour les coefficients des dérivées partielles (16) peuvent représenter des fonctions quelconques, mais il faut bien observer qu'alors les opérateurs, tels que (1), n'appartiendront pas forcément à un groupe. De plus, les choses pourront être compliquées encore par l'ensemble des termes du premier ordre, ensemble formant, en général, un opérateur distinct des précédents. Naturellement ces équations quelconques ne jouiront en rien des propriétés étudiées au début de ce Chapitre, mais je remarquerai cependant que la régularisation met en lumière certains points intéressants. Une équation à r variables se régularisera, en général, avec r carrés symboliques. Ainsi, une équation du second ordre, à deux variables, régularisée, contient, en général, deux carrés dans son premier membre, les deux carrés pouvant être remplacés facilement par un produit; on retrouve la forme donnée à l'équation générale du second ordre par Legendre et Imschenetsky (E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 32). Les méthodes de ces deux savants, celle de Laplace, ne s'étendent pas aux équations générales à plus de deux variables, mais si, parmi ces dernières, on considère la classe de celles qui se régularisent dans l'espace à deux dimensions, lesquelles ne contiennent que deux carrés, l'analogie avec les équations à deux variables subsiste. Je ne puis m'étendre ici plus longuement sur ces idées, mais la décomposition en carrés symboliques me paraît comparable à la décomposition des formes quadratiques algébriques.

Les équations régularisables à l'aide de nombres différents de carrés sont, à coup sûr, aussi séparées que les formes algébriques qui sont dans le même cas. La régularisation peut donc être la source de classifications analogues à celles de la théorie des caractéristiques.

12. *Applications des théories précédentes.* — Après les équations à coefficients constants, étudiées au Chapitre précédent, les plus simples

seront celles formées d'opérateurs aussi simples que possible appartenant à un groupe continu simplement transitif. De tels groupes sont les groupes projectifs du plan dont les opérateurs sont de la forme

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

ξ et η étant du premier degré en x et y. De tels opérateurs formeront, comme on le voit facilement, des équations dont les dérivées du second ordre auront pour coefficients des formes du second degré en x et y, les dérivées du premier ordre ayant pour coefficients des formes du premier degré de ces mêmes variables. Réciproquement, des équations aux dérivées partielles de cette forme, lesquelles correspondent aux équations différentielles ordinaires admettant pour intégrale la série hypergéométrique, auront toujours certaines chances de pouvoir être considérées comme formées des opérateurs d'un groupe projectif, vu l'assez grande variété de formes que présentent ces groupes.

Voici un Tableau de groupes projectifs à deux paramètres; ce sont de véritables groupes à deux paramètres ou des sous-groupes tirés de groupes plus généraux.

On représente, suivant l'usage, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ par p et q.

Groupes dont l'une des constantes de structure est nulle.

1° $(XY) = \lambda X$.

X.	Y.	Structure.
p	$xp - yq$	1,0
q	$yq - xp$	1,0
p	$axp + byq$	a,0
q	$axp + byq$	b,0
xq	$axp + byq$	$b - a$,0
yp	$axp + byq$	$a - b$,0
$p + xq$	$xp + 2yq$	1,0
q	$p + yq$	1,0
	$xp + (y - x)q$	1,0

2° $(XY) = \mu Y$.

X.	Y.	Structure.
xp	xq	0, 1
yq	yp	0, 1
xp	$x^2p + xyq$	0, 1
yq	$xyp + y^2q$	0, 1
$xp - yq$	$x^2p + xyq$	0, 1
$yq - xp$	$xyp + y^2q$	0, 1
$xp + 2yq$	$(x^2 - y)p + xyq$	0, 1
$xp + q$	xq	0, 1

Ces groupes sont empruntés à l'Ouvrage de S. Lie et G. Scheffers : *Vorlesungen über continuierliche Gruppen* (p. 288).

D'après un théorème général de Lie (*loc. cit.*, p. 435 : *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, p. 340), deux groupes simplement transitifs, ayant même structure, sont semblables, c'est-à-dire qu'on peut les ramener l'un à l'autre par un changement de variables.

Ainsi, dans la liste précédente, nous pouvons prendre deux groupes au hasard et les transformer l'un en l'autre. Soient, pour fixer les idées, p, $axp + byq$ à ramener à la forme xp, xq. Pour que les structures soient complètement identiques, il convient d'abord de les écrire

$$p, \quad xp + \frac{b}{a}yq, \quad 1, 0,$$

$$xq, \quad -xp, \quad 1, 0.$$

Nous avons ensuite (S. Lie, *loc. cit.*) à intégrer le système complet

$$\frac{\partial f}{\partial x} + x'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{b}{a}y\frac{\partial f}{\partial y} - x'\frac{\partial f}{\partial x'} = 0$$

qui admet les deux intégrales distinctes $xx' - y' = C$, $y^a x'^b = C'^a$, d'où les formules de transformation

$$x' = \left(\frac{C'}{y}\right)^{\frac{a}{b}}, \qquad y' = x\left(\frac{C'}{y}\right)^{\frac{a}{b}} - C.$$

Nous voyons donc que toutes les équations linéaires aux dérivées partielles formées des opérateurs d'un groupe simplement transitif du plan, pourront toujours être régularisées finalement à l'aide des opérateurs d'un groupe de même nature que l'on pourra prendre aussi simple que possible, notamment dans la liste des groupes projectifs.

S'il s'agissait non pas de groupes plans mais de groupes d'un espace plus général, on arriverait évidemment à des conclusions identiques, mais, dans la suite du présent Mémoire, ce sont les équations à deux variables qui nous fourniront des applications des théories précédentes.

III. — L'équation d'Euler et Poisson.

13. Il résulte de ce qui précède que les équations les plus simples, après les équations à coefficients constants proprement dites, sont celles dont le premier membre est formé d'opérateurs appartenant à un groupe projectif plan. En fait, la simplicité relative de telles équations a naturellement conduit les géomètres à s'occuper d'elles. On en a un bel exemple dans l'équation d'Euler et Poisson :

$$(1)\qquad (x-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - n(x-y)\frac{\partial f}{\partial x} + m(x-y)\frac{\partial f}{\partial y} - pf = 0,$$

à laquelle M. G. Darboux a consacré de fort belles pages dans ses *Leçons sur la Théorie des surfaces* (t. II, p. 54), en se réclamant surtout de la méthode de Laplace et de résultats appartenant en propre à lui et à M. P. Appell.

Je vais reprendre cette étude par les méthodes du Chapitre précédent en m'efforçant surtout de séparer de l'équation toutes les propriétés qui ne lui appartiennent pas en propre, mais appartiennent aux opérateurs :

$$(2)\qquad X = (x-y)\frac{\partial}{\partial x},\qquad Y = (x-y)\frac{\partial}{\partial y}$$

et qui, par suite, appartiendraient tout aussi bien à une équation de forme et d'ordre quelconques formée avec les mêmes opérateurs.

L'équation (1) s'écrit avec les opérateurs (2) :

$$(3) \qquad XY - nX + (m-1)Y - pf = 0.$$

En multipliant d'abord par 4, on la régularise facilement à l'aide de deux vecteurs de longueur nulle dirigés suivant les droites isotropes. On l'obtient ainsi sous la forme

$$(4) \quad (X+Y)^2 - (X-Y)^2 - (4n-2)X + (4m-2)Y - 4pf = 0.$$

Les opérateurs (2) forment un groupe dont les constantes de structure sont 1 et 1. On a, en effet, $(XY) = X + Y$. Ce groupe étant projectif, on peut remplacer ses opérateurs par d'autres définissant des groupes projectifs de même structure. Cherchons, par exemple, en nous laissant guider par la simplicité, à écrire l'équation d'Euler et Poisson avec les opérateurs xp, xq. Le changement de variables $x' = x - y$, $y' = x + y$ nous donne facilement

$$X = x'\frac{\partial}{\partial x'} + x'\frac{\partial}{\partial y'}, \qquad Y = -x'\frac{\partial}{\partial x'} + x'\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Supprimant les accents et portant dans (4), il vient

$$\left(x\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 - \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(m - \frac{1}{2}\right)\left(-x\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) - pf = 0$$

ou, en développant et reprenant les notations ordinaires,

$$(5) \quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - (m+n)x\frac{\partial f}{\partial x} + (m-n)x\frac{\partial f}{\partial y} - pf = 0.$$

Pour $m = n$, on reconnaît une forme spéciale de l'équation donnée par Euler (G. Darboux, *loc. cit.*, p. 56). Cette forme (5) étant obtenue, je préfère revenir à la forme habituelle et aux opérateurs (2), surtout pour ne pas m'écarter de la forme d'exposition adoptée par M. G. Darboux.

Déterminons d'abord des opérateurs permutables aux opérateurs (2).

Il nous faut intégrer le système complet

$$(x-y)\frac{\partial f}{\partial x}+(x'-y')\frac{\partial f}{\partial x'}=0, \qquad (x-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(x'-y')\frac{\partial f}{\partial y'}=0,$$

auquel on trouve facilement les intégrales

$$\frac{x'-y'}{x-y}, \quad \frac{xy'-x'y}{x-y}$$

qui, égalées à des constantes arbitraires a et b, donnent les formules de transformation

$$(6) \qquad x'=ax+b, \qquad y'=ay+b.$$

Ce sont les transformations finies du groupe réciproque de (2); on trouve alors immédiatement ses transformations infinitésimales :

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}, \qquad x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}.$$

On vérifie facilement que ces deux opérateurs sont permutables aux opérateurs (2).

Il s'ensuit que *toute équation linéaire formée avec les opérateurs* (2), *quels que soient sa forme ou son ordre, a ses solutions changées en d'autres solutions par la transformation* (6) *et les opérateurs* (7). Pour l'équation d'Euler et Poisson, ce résultat a d'ailleurs été donné par M. G. Darboux (*loc. cit.*, p. 61) qui rappelle que Sophus Lie l'a également obtenu. Mais il est à démêler d'autres qui, au premier abord, paraissent de même nature. Ainsi, pour $p=0$, l'opérateur

$$x^2\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}+mx+ny$$

change toute solution de l'équation (1) en une autre, mais c'est là une propriété particulière à l'équation d'Euler et Poisson; elle n'est plus vraie pour une équation construite avec les opérateurs (2) assemblés au hasard. De même, l'élégante transformation finie de M. P. Appell est une propriété particulière à (1) pour $p=0$.

14. D'après ce que nous avons vu à la fin du n° **6**, l'équation qui

nous occupe doit avoir une solution dont le type subsiste pour toute équation formée des opérateurs (2), les solutions du type contenant au moins une constante arbitraire qui est particularisée, quant à chaque équation particulière, au moyen d'une équation algébrique. D'après les généralités du n° **6**, ce type de solution est ici défini par l'exponentielle e^{U}, U étant solution du système

$$(x-y)\frac{\partial f}{\partial x}=\alpha_1, \qquad (x-y)\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha_2, \qquad \lambda\alpha_1+\mu\alpha_2=0;$$

λ et μ sont les constantes de structure de (2), donc 1 et 1, si bien qu'en posant $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha$, on trouve la solution

$$U=\alpha\log(x-y),$$

d'où

$$e^{U}=(x-y)^{\alpha}.$$

La solution $(x-y)^{\alpha}$ appartient donc à toutes les équations linéaires formées des opérateurs (2). Dans chaque cas particulier, α est racine d'une équation algébrique qui est ici :

$$\alpha^2+(m+n-1)\alpha+p=0. \tag{8}$$

On vérifie immédiatement que, comme l'indique la théorie générale, la solution en question n'est pas généralisée par la transformation (6). D'ailleurs les opérateurs (7) ne la transforment pas non plus en une solution nouvelle. Partant de la solution $(x-y)^{\alpha}$ dans laquelle il est sous-entendu que α est racine de (8), il est naturel de chercher des solutions de l'équation (1) qui soient de la forme $(x-y)^{\alpha}\theta(x,y)$. La fonction θ est alors déterminée par une équation telle que

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}-\frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\beta}{x-y}\frac{\partial\theta}{\partial y}=0, \tag{9}$$

que j'appellerai, avec M. Darboux, l'équation $E(\beta,\beta')$ en désignant par $Z(\beta,\beta')$ une quelconque de ses solutions (G. Darboux, *loc. cit.*, p. 55). L'équation (8) nous montre immédiatement que, comme solution du type précédent, l'équation (9) admet $(x-y)^{1-\beta-\beta'}$, ce qui est un résultat bien connu.

15. *Sur l'application d'une méthode de Laplace généralisée par M. Picard.* — Il nous reste à partir d'une solution de (9), distincte de la précédente, pour qu'on puisse la généraliser par une transformation du groupe (6). Ici se pose alors la question générale de trouver une première solution particulière des équations qui nous occupent. Le procédé applicable à l'équation d'Euler et Poisson qui consiste à chercher une solution qui soit le produit d'une fonction de x seul par une fonction de y seul est peut-être le plus simple auquel on puisse avoir recours. Plus généralement, si l'on considère que les équations ici étudiées ont souvent des coefficients qui sont des formes linéaires de x et de y, il sera d'un grand secours dans de tels cas d'appliquer la méthode donnée par Laplace pour les équations différentielles ordinaires et étendue aux équations aux dérivées partielles par M. Picard. (*Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* 1891, p. 308). Cette méthode de M. Picard est fort intéressante à comparer avec celle développée dans le présent Mémoire, bien que toutes deux ne puissent s'appliquer toujours aux mêmes équations. En effet, la méthode de M. Picard s'applique à des équations à coefficients linéaires qui peuvent parfaitement ne pas être formées des opérateurs d'un groupe, seul cas étudié ici, mais d'autre part elle ne s'applique pas dans le cas de coefficients quadratiques alors que les équations de ce Mémoire peuvent en présenter de tels. Mais dans les deux cas on peut obtenir, de bien des manières, des solutions renfermant une fonction arbitraire (E. Picard, *loc. cit.*). Pour les équations aux opérateurs X, on peut, de toute solution contenant une fonction arbitraire, en déduire d'autres au moyen des opérateurs réciproques Y. Seulement rien n'indique que cela augmente toujours la généralité.

Pour en revenir à l'équation d'Euler et Poisson nous pouvons facilement en trouver des solutions particulières telles que

$$x^{\beta}y^{\beta'}, \quad (y-x)^{1-\beta-\beta'}x^{\beta'-1}y^{\beta-1} \tag{10}$$

en raisonnant soit comme M. Darboux, soit comme M. Picard.

La première est d'une importance capitale, car on peut en déduire l'intégrale générale au sens de Riemann sans s'appuyer sur d'autres propriétés de l'équation que celles qui appartiennent aux opérateurs

(2) comme on le verra dans un instant. Tout d'abord notre première solution devient par la transformation (6)

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}.$$

Considérant a et b comme des fonctions d'une certaine variable u et $\varphi(u)$ désignant une fonction arbitraire, on conclut de là la solution

$$(11) \qquad \int \varphi(u)(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}du.$$

En raisonnant de même sur la seconde solution (10) et ajoutant à la précédente on aurait la formule à deux fonctions arbitraires donnée dans un cas particulier par Poisson et généralisée par M. Appell. Or cette formule est la source d'une foule de solutions; elle peut même donner celles déduites par M. Darboux, dans un ordre d'idées différent, de la méthode de Laplace. Ainsi soit u une variable imaginaire et prenons l'intégrale

$$(12) \qquad \int \varphi(u)(x-u)^{-\beta}(y-u)^{-\beta'}du$$

le long d'un contour infiniment petit décrit autour du point singulier $u=y$ en supposant que β et β' soient des entiers positifs m et n. On obtient à un facteur constant près

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\frac{\varphi(y)}{(x-y)^m} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1}\partial y^{n-1}}\left[\frac{\varphi(y)}{x-y}\right].$$

En raisonnant de même pour le pôle $u=x$, on aurait une autre formule qui, avec la précédente, donnerait

$$Z(m,n)=\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1}\partial y^{n-1}}\left(\frac{X-Y}{x-y}\right),$$

X et Y étant respectivement fonctions de x seul et de y seul. (G. Darboux, *loc. cit.*, p. 65.)

Comme autre exemple observons d'abord avec M. Darboux que les limites constantes de l'intégrale (12) peuvent être remplacées par x

ou par y, si bien que l'intégrale

$$\int_x^\infty u^{\lambda+\beta+\beta'-1}(u-x)^{-\beta}(u-y)^{-\beta'}\,du$$
$$= x^\lambda \int_1^\infty v^{\lambda+\beta+\beta'-1}(v-1)^{-\beta}\left(v-\frac{y}{x}\right)^{-\beta'} dv$$

où λ est une constante arbitraire, est une solution. On reconnaît une intégrale définissant la série hypergéométrique (E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 228) et nous retrouvons la solution connue

$$x^\lambda F\left(\beta', -\lambda, 1-\beta-\lambda, \frac{y}{x}\right).$$

16. *Sur la recherche de l'intégrale générale d'après Riemann.* — La recherche de l'intégrale de Riemann qui est déterminée dans tout le plan quand on lui assigne des valeurs arbitraires sur les caractéristiques de l'équation nécessite d'abord la considération de l'équation adjointe

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\beta+\beta'}{(x-y)^2}u = 0$$

pour laquelle il faut trouver une solution se réduisant respectivement à

$$(14)\qquad \left(\frac{y-x_0}{y_0-x_0}\right)^{\beta'} \quad \text{et à} \quad \left(\frac{y_0-x}{y_0-x_0}\right)^{\beta}$$

pour $x = x_0$ et $y = y_0$, x_0 et y_0 jouant le rôle de constantes arbitraires dans cette solution qui doit satisfaire aussi à l'équation primitive, si l'on y considère au contraire x_0 et y_0 comme les variables. Sans revenir sur la savante analyse par laquelle M. Darboux résout ce problème, je veux simplement montrer que le résultat ne dépend au fond que de l'existence de la solution de laquelle nous sommes déjà partis. En effet, l'équation adjointe (13) est aussi une équation d'Euler et Poisson qui admet la solution $u = (x-y)^{\beta+\beta'}v$, si v satisfait à

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Or, nous pouvons prendre

$$\begin{aligned} v &= x^{-\beta'} y^{-\beta} \\ &= [(u-1)x - (ux_0 - y_0)]^{-\beta'} [(u-1)y - (ux_0 - y_0)]^{-\beta}, \end{aligned}$$

u, x_0, y_0 étant jusqu'ici des constantes, d'où la solution

$$\int u^{\beta-1} [u(x-x_0) - (x-y_0)]^{-\beta'} [u(y-x_0) - (y-y_0)]^{-\beta} du.$$

Pour limite supérieure de cette intégrale définie, on peut prendre l'infini positif et pour limite inférieure $\frac{x-y_0}{x-x_0}$, car β' se pouvant mettre avec l'approximation que l'on veut sous la forme $\frac{2p+1}{2q}$, p et q étant des entiers, ladite limite inférieure de l'intégrale sépare une partie réelle d'une partie purement imaginaire. Posant $u = \frac{1}{t} \frac{x-y_0}{x-x_0}$, on a

$$(x-y_0)^{-\beta'} (y-x_0)^{-\beta} \int_0^1 t^{-1-\beta} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{-\beta'} \left[\frac{1}{t} - \frac{(y-y_0)(x-x_0)}{(y-x_0)(x-y_0)}\right]^{-\beta} dt.$$

Cette solution v multipliée par $(x-y)^{\beta+\beta'}$ donne la solution u désirée. Pour $x = x_0$, $y = y_0$, elle se réduit à un facteur constant près aux expressions (14). Il resterait à vérifier que, considérée comme fonction de x_0 et y_0, elle satisfait à l'équation primitive, ce pourquoi je renvoie à l'ouvrage de M. Darboux.

Tous ces exemples montrent le grand parti que l'on peut tirer de solutions particulières dans la théorie des équations qui nous occupent.

IV. — Exemples divers. — Surfaces déterminées par la projection d'un système de lignes asymptotiques.

17. Les méthodes précédemment développées sont évidemment susceptibles de s'appliquer à beaucoup d'équations que l'on traitera comme l'équation d'Euler et Poisson, soit immédiatement, soit après un changement de variables ramenant, s'il y a quelque avantage à cela, les opérateurs du premier membre à d'autres opérateurs plus

simples. Je développerai un exemple en ce sens à propos d'une équation parabolique. Nous avons déjà vu que la famille de courbes

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$$

pouvait être considérée comme la projection d'un système d'asymptotiques de toutes les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad A^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2AB \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + B^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

ou

$$X^2(f) - Y(f) = 0,$$

si l'on pose

$$(3) \quad X(f) = A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad Y(f) = X(A)\frac{\partial f}{\partial x} + X(B)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

A côté du cas d'intégrabilité précédemment étudié au n° **7**, cas où les opérateurs X et Y étaient permutables, nous allons étudier celui où ces mêmes opérateurs définissent un groupe dont les transformations ne sont pas permutables. On aura donc

$$(XY) = \lambda X + \mu Y,$$

λ et μ désignant des constantes. En écrivant que les opérateurs (3) réalisent une telle condition, il vient les relations

$$X^2(A) - Y(A) = \lambda A + \mu X(A),$$
$$X^2(B) - Y(B) = \lambda B + \mu X(B).$$

Elles forment un système d'équations non linéaires fort compliqué. Si l'on consent à altérer la symétrie, on gagne tout de suite beaucoup en simplicité en remarquant que la première équation admet la solution $A = 1$, si $\lambda = 0$. Reste alors la seconde

$$X^2(B) - Y(B) - \mu X(B) = 0,$$

ou

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial y} + B^2\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \mu\left(\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{\partial B}{\partial y}\right) = 0.$$

Donc si B est une solution quelconque de cette dernière équation nous pouvons appliquer les méthodes développées dans le présent Mémoire à l'équation linéaire

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + B^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

qui est alors formée avec deux opérateurs X et Y, tels que

$$(XY) = \mu Y.$$

Tous les groupes définis par cette relation peuvent se ramener par un changement de variables au groupe projectif très simple

$$X = \mu x\frac{\partial}{\partial x},\qquad Y = x\frac{\partial}{\partial y}$$

qui y satisfait comme on le vérifie immédiatement.

Donc, quelle que soit la solution B satisfaisant à (4), l'équation (5) pourra toujours se ramener à la forme

$$\left(\mu x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ou, en développant,

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\mu^2 x}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Telle est donc l'équation que nous avons à étudier.

18. Pour trouver les opérateurs permutables à xp et xq, il nous faut intégrer le système complet

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + x'\frac{\partial f}{\partial x'} = 0,\qquad x\frac{\partial f}{\partial y} + x'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

qui admet les intégrales

$$\frac{x'}{x}, \quad y' - \frac{x'}{x} y.$$

En les égalant à des constantes arbitraires a et b, nous avons les formules de transformation

$$(7) \qquad x' = ax, \qquad y' = ay + b,$$

qui sont les transformations finies du groupe réciproque de xp, xq. Pour les transformations infinitésimales de ce groupe réciproque, on trouve immédiatement les opérateurs

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Donc les transformations finies (7) et les opérateurs (8) changent toute solution de l'équation (6) en une autre solution. Ce résultat, qui subsiste évidemment pour toutes les équations linéaires aux opérateurs xp et xq, n'est pas distinct, en particulier, de celui relatif à l'équation d'Euler et Poisson mise sous la forme (5) du n° **13**.

L'équation (6) étant écrite avec des opérateurs aussi simples que possible, on peut se demander si, inversement, on ne peut lui donner une forme encore plus simple, quitte à employer des opérateurs un peu plus compliqués. Nous pouvons essayer le procédé de réduction indiqué par M. E. Goursat dans ses *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* (t. II, p. 39). L'équation (6) admet les deux solutions évidentes $\log x$ et $x + \mu^2 y$. Faisons d'abord le changement de variables

$$u = \log x, \qquad v = y.$$

Les opérateurs xp et xq deviennent

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad e^u \frac{\partial f}{\partial v};$$

et l'équation (6) s'écrit alors

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{e^u}{\mu^2}\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Quant au changement de variables

$$u = x + \mu^2 y, \qquad v = y,$$

il transforme les opérateurs xp et xq en

$$(u - \mu^2 v)\frac{\partial f}{\partial u}, \quad (u - \mu^2 v)\left(\mu^2 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

et l'équation (6) en

$$\mu^2 (u - \mu^2 v)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Ces formes réduites sont intéressantes, surtout la seconde qui, pour $\mu = 1$, nous donne encore un exemple simple d'équation formée avec les mêmes opérateurs que l'équation d'Euler et Poisson, mais aucune d'elles ne paraît présenter de plus grandes facilités d'intégration que la forme primitive. J'ai observé, au contraire, qu'il était utile, quant à la recherche d'une solution particulière, de remplacer x par $-\frac{x^2}{4}$. L'équation devient alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

et peut être considérée comme formée avec les opérateurs

$$x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{11}$$

Les transformations finies et infinitésimales (7) et (8) sont alors remplacées par

$$x' = ax, \qquad y' = a^2 y + b, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{13}$$

19. *Recherche d'une solution particulière. Application de la méthode de Laplace généralisée par M. Picard.* — On peut d'abord rechercher une solution de l'équation (10) en admettant qu'elle ait

la forme XY, X étant fonction de x seul, Y fonction de y seul. En effet l'équation

$$X''Y + \frac{1}{x}X'Y + \frac{1}{\mu^2}XY' = 0$$

se scinde immédiatement en les deux suivantes :

$$(14) \qquad X'' + \frac{1}{x}X' + X = 0, \qquad Y' - \mu^2 Y = 0.$$

On reconnaît immédiatement dans la première une équation linéaire intégrable au moyen des transcendantes de Bessel (H. Laurent, *Traité d'Analyse*, t. V, p. 218).

D'ailleurs on vérifie sans peine que l'expression

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{\alpha i x}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\, d\alpha = \pi\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^6}{6!} + \ldots\right)$$

en est une solution.

La seconde équation (14) donnant $Y = e^{\mu^2 y}$, nous avons, pour (10), la solution particulière

$$e^{\mu^2 y}\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\alpha i x}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\, d\alpha$$

que l'on peut, si on le désire, débarrasser de tout élément imaginaire en remplaçant x par $-ix$ et y par $-y$, substitutions évidemment permises d'après les formules (12). On obtient ainsi

$$(15) \qquad e^{-\mu^2 y}\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\, d\alpha.$$

Comme je l'ai expliqué au Chapitre précédent, on pourrait aussi appliquer la méthode de Laplace généralisée par M. Picard (*loc. cit.*).

Cette méthode consiste à poser

$$f = \int\int e^{\alpha x} e^{\beta y} \psi(\alpha\beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

On a ensuite

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \int e^{\alpha x} e^{\beta y} \alpha^2 \psi(\alpha\beta)\, d\beta - \iint e^{\alpha x} e^{\beta y} \frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha^2 \psi)\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \iint e^{\alpha x} e^{\beta y} \alpha \psi\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\frac{x}{\mu^2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\mu^2}\int e^{\alpha x} e^{\beta y} \beta\, \psi(\alpha\beta)\, d\beta - \frac{1}{\mu^2}\iint e^{\alpha x} e^{\beta y} \frac{\partial}{\partial \alpha}(\beta\psi)\, d\alpha\, d\beta.$$

Additionnant, il faut pouvoir annuler tout le second membre. On déterminera d'abord la fonction ψ comme devant satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha^2\psi) - \alpha\psi + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\beta\psi}{\mu^2}\right) = 0$$

ou

$$\left(\alpha^2 + \frac{\beta}{\mu^2}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \alpha\psi = 0,$$

d'où

$$\psi = \frac{\varphi(\beta)}{\sqrt{\mu^2\alpha^2 + \beta}},$$

φ étant une fonction arbitraire. Si maintenant on imagine, pour fixer les idées, que les intégrations par partie par rapport à α aient été faites entre les limites -1 et $+1$, il nous reste à annuler

$$\int e^{\alpha x} e^{\beta y}\left[\frac{\alpha^2\varphi}{\sqrt{\mu^2\alpha^2+\beta}} + \frac{\beta\varphi}{\mu^2\sqrt{\mu^2\alpha^2+\beta}}\right] d\beta$$
$$= \frac{1}{\mu^2}(e^x - e^{-x})\int \varphi(\beta) e^{\beta y}\sqrt{\beta + \mu^2}\, d\beta.$$

Donc, en suivant toujours le raisonnement de M. Picard, nous pouvons considérer β comme une variable imaginaire et dire que, *si l'on peut trouver une fonction* $\varphi(\beta)$ *et un contour* C *tel que l'intégrale*

$$\int_C \varphi(\beta) e^{\beta y}\sqrt{\beta + \mu^2}\, d\beta \tag{16}$$

soit nulle, l'intégrale double

$$\int_{-1}^{+1}\int_C e^{\alpha x} e^{\beta y} \frac{\varphi(\beta)}{\sqrt{\beta + \mu^2\alpha^2}}\, d\alpha\, d\beta \tag{17}$$

est solution de (10).

Si, comme application, nous prenons $\varphi(\beta) = \frac{1}{\beta + \mu^2}$ et si le contour C est une circonférence infiniment petite entourant le point $\beta = -\mu^2$, l'intégrale (16) est nulle, comme on s'en aperçoit facilement, et (17) devient, à un facteur constant près,

$$e^{-\mu^2 y} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha.$$

On retrouve ainsi la solution (15).

20. *Généralisation de la solution particulière obtenue.* — Si dans la solution (15) on remplace x par x' et y par y', conformément aux formules (12), on obtient une nouvelle solution qui, à un facteur constant près, est

$$e^{-\mu^2 \alpha^2 y} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\alpha a x}}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha.$$

Multipliant par $F(a)\,da$, F étant une fonction arbitraire et intégrant entre des limites quelconques simplement assujetties à donner un sens à l'intégrale, nous avons la solution plus générale

$$(18) \qquad \int F(a) e^{-\mu^2 a^2 y} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\alpha a x}}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha\, da.$$

De telles expressions sont évidemment en nombre illimité, car toutes les solutions qui se déduisent de (18) en particularisant $F(a)$ peuvent évidemment être traitées à leur tour comme (15). Ainsi, si, dans la formule précédente, nous prenons la première intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$ en faisant $F(a) = 1$, il est facile d'intégrer par rapport à a en partant de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

(A. Cauchy, *Œuvres complètes*, 2e série, t. VII, p. 280). On trouve ainsi

$$(19) \quad \frac{1}{\sqrt{y}} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{\alpha^2 x^2}{4\mu^2 y}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2}{\sqrt{y}} \left[1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{2} \frac{x^2}{4\mu^2 y} + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^4}{4^2 \mu^4 y^2} + \ldots \right],$$

expression qui, comme on le vérifie facilement, est bien solution de (9). En posant $\frac{b}{a^2} = -c$, on déduit immédiatement de (19) la nouvelle formule

$$(20) \qquad \int \frac{\Phi(c)}{\sqrt{y-c}} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{\alpha^2 x^2}{4\mu^2(y-c)}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} dc,$$

$\Phi(c)$ étant cette fois la fonction arbitraire.

Cette dernière formule est intéressante; l'une des limites constantes de la première intégrale pourrait être remplacée par y, car, lorsque c varie en passant par cette valeur, nous avons de part et d'autre une valeur réelle et une valeur purement imaginaire pour l'intégrale. Je me suis proposé d'autres questions laissées momentanément en suspens tant elles paraissent contenir de difficultés nouvelles, notamment celle d'appliquer à l'équation (10), pour de certains contours, la méthode de Riemann. En fait, d'ailleurs, rien n'autorise le seul essai d'appliquer à une équation parabolique des méthodes qui jusqu'ici ont été plutôt particulières aux équations hyperboliques. Toutefois il faut noter que, à l'aide d'un artifice des plus ingénieux, M. P. Appell a appliqué la méthode de Riemann à l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

[*Sur l'équation* $r - q = 0$ (*Journal de Mathématiques*, 1892, p. 187)] composée d'opérateurs permutables, et ceci, dans une certaine mesure, autorise des recherches pour une équation qui, telle que (10), a un premier membre formé d'opérateurs appartenant à un groupe.

21. *Applications géométriques de ce qui précède.* — D'après ce que nous avons vu au n° **17**, à toute solution B de l'équation (4) correspond une famille de courbes

$$(21) \qquad \frac{dy}{dx} = B$$

qui peut être considérée comme la projection d'un système d'asympto-

tiques de surfaces dont la connaissance dépend de l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles (5) dont la forme diffère suivant celle de B, mais qu'un changement de variables convenable pourra toujours ramener identiquement à l'équation (9). Il semble fort peu commode de trouver des solutions de (4), si bien que les résultats ne seront ni aussi nombreux, ni aussi élégants que dans le cas (*voir* au n° **7**) où l'équation (2), du présent Chapitre, se composait d'opérateurs permutables.

Cherchons d'abord une solution de (4) qui soit fonction de x seulement, si bien que la famille de courbes (21) s'obtiendra par la translation faite parallèlement à l'axe des y d'une des courbes la composant. On trouve immédiatement

$$\frac{dy}{dx} = ae^{\mu x} + b,$$

a et b étant des constantes. L'équation (2) est alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(ae^{\mu x} + b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + (ae^{\mu x} + b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

et est formée avec les opérateurs

$$(22) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + (ae^{\mu x} + b)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mu ae^{\mu x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

définissant un groupe dont les constantes de structure sont 0 et μ. Nous devons pouvoir les ramener aux opérateurs (11), ou plus exactement à

$$(23) \qquad \frac{\mu}{2}x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad -\frac{1}{4}x^2\frac{\partial f}{\partial y},$$

par un changement de variables dont la connaissance exige d'abord l'intégration du système complet

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (ae^{\mu x} + b)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\mu}{2}x'\frac{\partial f}{\partial x'} = 0,$$

$$\mu ae^{\mu x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{4}x'^2\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

On en trouve assez facilement les deux intégrales

$$\frac{e^{\mu x}}{x'^2}, \quad \frac{\mu}{4a}(y - bx) + \frac{e^{\mu x}}{x'^2}\left(\mu^2 y' - \frac{x'^2}{4}\right)$$

qui, égalées à des constantes arbitraires, donnent les formules de transformation

$$(24) \qquad x' = Ce^{\frac{\mu x}{2}}, \qquad y' = \left(\frac{C}{2\mu}\right)^2\left[e^{\mu x} + \frac{\mu}{a}(bx - y) + C'\right].$$

On vérifie sans peine qu'elles transforment les opérateurs (22) en les opérateurs (23). Finalement, nous voyons qu'à toute solution $S(x, y)$ de l'équation (10) correspond, par les formules (24), une double infinité de surfaces $z = S(x', y')$ dont un système d'asymptotiques se projette suivant la famille de courbes

$$\frac{dy}{dx} = ae^{\mu x} + b,$$

qui contient notamment les courbes dont la sous-tangente est constante. Ces résultats peuvent être étendus par une transformation homographique.

22. On pourrait maintenant se proposer de rechercher d'autres solutions de l'équation (4); il y en a qui sont fonctions de y seul, d'autres qui sont le produit d'une fonction de x seul par une fonction de y seul; mais il serait certainement fastidieux de multiplier les exemples en ce sens.

Le but de ce Chapitre a surtout été de montrer comment, une équation telle que (2) étant donnée, on peut chercher les conditions permettant de la considérer comme formée avec les opérateurs d'un groupe simplement transitif, puis, dans les cas où cela est réalisé, de trouver un changement de variables aussi avantageux que possible pour sa simplification et finalement son intégration au moyen d'intégrales définies multiples contenant des fonctions arbitraires.

Sur une classe d'équations aux dérivées partielles, du second ordre, du type hyperbolique, à 3 ou 4 variables indépendantes ;

PAR M. R. D'ADHÉMAR.

PRÉFACE.

Les équations aux dérivées partielles peuvent être étudiées à deux points de vue : ou bien l'on cherche une intégrale contenant *tout l'arbitraire possible* (¹) : c'est le PROBLÈME DE CAUCHY, et l'on regarde alors, en général, tous les éléments comme *analytiques* (développables en série de Taylor); ou bien l'on cherche une intégrale définie par des *conditions données* sur une *frontière donnée :* c'est le problème de la Physique mathématique, le PROBLÈME DANS LE DOMAINE RÉEL, et les éléments ne sont pas forcément analytiques.

Ce Mémoire est consacré à l'étude du PROBLÈME RÉEL pour les équations :

$$A(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + fu + h$$

(¹) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces* (Gauthier-Villars), t. II, p. 97. — E. GOURSAT, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles* (Hermann).

et

$$B(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots + h,$$

les a, b, ..., h étant des fonctions des variables indépendantes.

L'équation

$$A(u) = f(x, y, z)$$

a été étudiée, à ce point de vue de détermination d'une intégrale par ses valeurs sur une surface, par M. *Volterra* (¹), professeur à l'Université de Rome.

Le Mémoire de M. Volterra est d'une lecture difficile, mais il suffit de lire les pages 182-184, puis 185-193, pour saisir son *idée fondamentale,* qui se rattache à la méthode de *Green* pour le problème de Dirichlet, et à la méthode de *Riemann* pour les équations du type :

$$\text{(H)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + d.$$

Les équations (H), dites *hyperboliques,* admettent pour *caractéristiques* les parallèles aux *bissectrices des axes* (²). M. Volterra a reconnu intuitivement que les cônes Λ parallèles au cône

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

jouent le rôle de *caractéristiques* pour l'équation

$$A(u) = f,$$

et cela plusieurs années avant que M. J. Beudon, au point de vue du problème de Cauchy, ait étendu la définition des caractéristiques au cas des équations à *plus de deux variables* indépendantes.

Pour l'équation de Laplace, l'analogue de Λ est un point, et il existe des différences profondes entre les équations à caractéristiques

---

(¹) *Acta mathematica,* t. XVIII, 1894.

(²) Ém. Picard, *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1899 et *Cours de la Sorbonne,* 1899, a insisté sur la disposition nécessaire des données par rapport à ces droites.

réelles, dites *hyperboliques,* et les équations à caractéristiques *imaginaires,* dites *elliptiques* (1).

Nous traitons donc ici du *Problème réel* pour des équations à *caractéristiques réelles.*

Tout d'abord j'ai mis en relief la notion de *conormale* (2), et l'idée et le mot ont été adoptés, de suite, par MM. Hadamard (3) et Coulon (4).

Par là j'*évite les longs calculs* de M. Volterra et, en second lieu, je détermine les *surfaces privilégiées,* c'est-à-dire celles qui sont susceptibles de *déterminer une intégrale* avec *moins* de données que les surfaces ordinaires, et cela tout *intuitivement.*

Ces surfaces sont les plans à 45° sur le plan xOy, ou les cônes Λ, pour (A), comme pour (H) les bissectrices sont les *droites privilégiées.*

Ce Mémoire se divise tout naturellement en trois Parties dont je résume ici le contenu :

PREMIÈRE PARTIE : *Étude du problème intérieur pour* $A(u) = f$.

Soit une surface S découpée *intérieurement* par un cône Λ^0. M. Volterra obtient la valeur de u au sommet du cône Λ^0 en fonction des valeurs de u et des dérivées premières sur S. J'ai repris ceci : il faut donner, sur S, l'*intégrale* et sa *dérivée conormale.* J'ai étudié quelles sont les *formes acceptables* pour les surfaces S.

J'ai établi la *réciproque difficile* et d'un haut intérêt : si le point A, sommet de Λ^0, s'approche indéfiniment de S, la valeur de u en A tend vers la valeur donnée sur S au point (1), point limite des positions de A.

Dans le cas où la surface S est une *surface privilégiée,* un cône Λ^1, *j'ai commencé l'étude de cette réciproque.* Il se présente les plus grandes difficultés et, à cette heure, l'étude n'est pas encore complètement terminée. Elle devra être l'objet d'un Mémoire ultérieur.

---

(1) R. D'ADHÉMAR, *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1901.

(2) R. D'ADHÉMAR, *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences,* 11 février 1901.

(3) *Leçons sur la propagation des ondes* (Hermann), 1903, et *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1903.

(4) *Thèse* (Hermann), 1902.

Deuxième Partie : *Étude du problème extérieur* pour

$$A(u) = f(x, y, z).$$

Ici la surface S, qui porte les données, a la forme d'un *cylindre* d'axe Oz au point de vue de l'*Analysis situs* et l'on considère sa section *extérieure* à un cône Λ^0.

M. Volterra a donné la formule de l'intégrale et, ici encore, j'ai simplifié. Mais cette formule *ne représente la solution que si la solution existe!*

En effet, M. Volterra a trouvé *une condition fonctionnelle* très complexe à laquelle doivent satisfaire les données sur S.

J'ai trouvé de *nouvelles conditions fonctionnelles* et j'ai montré que le problème, en général, est *impossible*. Si l'on a une solution, cette solution véritable satisfera à des identités remarquables. Il semble difficile de préciser davantage, à cette heure.

Troisième Partie : *Extensions diverses.*

Plusieurs problèmes, extensions de celui de M. Volterra, ont été étudiés et résolus récemment. Considérons d'abord les équations :

$$\Delta^{p,1}(u) = \sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t).$$

Pour ces équations M. Tedone [1] a résolu, sans peine, le *problème intérieur* et aussi le *problème extérieur pour* $p = 2n$. Personne n'avait réussi pour le problème extérieur lorsque p est *impair*. J'y suis arrivé pour $p = 3$ [2]. Bien entendu, l'on retrouve une *accumulation de conditions* pour les données dont il ne semble pas que l'on puisse dire grand'chose. En général, le problème est impossible.

---

(1) *Annali di Matematica*, 1898.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 16 décembre 1902.

Considérons maintenant les équations étudiées par M. J. Coulon [1]

$$\Delta^{p,q}(u) = \sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \sum_1^q \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} = f(x, y).$$

L'on connaît les beaux résultats de M. Picard, par les *approximations successives* dans le cas de deux variables indépendantes, pour les types *elliptiques* et *hyperboliques* (et dans le cas de deux variables, tous les types se ramènent à ces deux-là ou au type *parabolique*).

J'ai tenté d'intégrer :

$$\Delta^{p,q}(u) = \sum_1^p a_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + \sum_1^q b_k \frac{\partial u}{\partial y_k} + hu + f.$$

Mais, *après ma Note* [2], a paru la Thèse de M. Coulon. Pour p et q *supérieurs* à *un*, l'on n'a plus affaire qu'au *problème extérieur* et l'on retrouve les *conditions*. Ma solution était formelle, par suite. Mais, *pour* $q = 1$, *j'ai intégré l'équation dont le second membre est linéaire* par rapport aux dérivées premières.

Ainsi donc la méthode d'approximation de M. Picard, aussi bonne pour le *problème réel* que pour le *problème de Cauchy*, est encore féconde pour certaines équations, du type hyperbolique, à plus de deux variables indépendantes.

Je n'ai pas abordé l'étude des *systèmes d'équations du type hyperbolique*. M. Hadamard a fait l'extension aux systèmes de la notion de caractéristique [3], introduite par M. Beudon. Mais il n'y a plus l'*analogue* de la conormale et je n'aurais pu que répéter MM. Volterra et Tedone.

L'on peut, pour les systèmes de M. Volterra, mettre un second membre linéaire par rapport aux dérivées premières et intégrer en usant des approximations comme je le fais pour $\Delta^{p,1}(u)$.

Je dois citer, relativement aux équations du type hyperbolique, les

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 mars 1900.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 16 février 1902, et *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1901.

(3) J. Beudon, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1897, et J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*. Hermann, 1903.

travaux de Cauchy, Poisson ([1]), M. Boussinesq, M. Poincaré, Riemann ([2]), M. Darboux ([3]), M. Picard ([4]), M. Le Roux ([5]), Kirchhoff ([6]), M. Hadamard ([7]), etc.

Pour les approximations, on doit citer d'abord les mémorables écrits de M. Picard ([8]), puis M. Zaremba ([9]), M. E. Le Roy ([10]), M. Delassus ([11]), etc.

Il y a là une méthode fondamentale également féconde dans la théorie ([12]) des *équations fonctionnelles* et dans la théorie des *équations différentielles,* et qui permet de ne pas rester exclusivement dans le domaine analytique qui est un domaine restreint.

C'est sous l'influence de l'enseignement de M. Picard que j'ai entrepris ce travail et je dois beaucoup à ses conseils très bienveillants et à ses encouragements pour les quelques résultats que je donne ici, et que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences les 11 février 1901, 16 février 1902, 16 décembre 1902 ([13]).

([1]) *Voir* le Cours de M. P. Duhem, *Sur l'Hydrodynamique.* Hermann.

([2]) *Œuvres,* traduction française, Gauthier-Villars.

([3]) *Leçons sur la Théorie des surfaces,* t. II.

([4]) *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1899, et *Cours professé à la Sorbonne,* printemps 1899.

([5]) *Journal de Mathématiques,* 1900, et *Thèse* (*Annales de l'École Normale,* 1897).

([6]) *Zur Theorie der Lichstrahlen* (*Kaiserliche Akademie,* 1882).

([7]) *Leçons.* Hermann, 1903.

([8]) *Journal de Mathématiques,* 1890 et 1893. *Traité d'Analyse,* t. III, et supplément au Tome IV des *Leçons* de M. Darboux.

([9]) *Journal de Mathématiques,* 1895.

([10]) *Thèse* (*Annales de l'École Normale,* 1898).

([11]) *Thèse* (*Annales de l'École Normale,* 1898).

([12]) Mémoires de M. Picard (*Acta mathematica,* t. XVIII et XXIII), etc.

([13]) Pour les renseignements bibliographiques détaillés, *voir* la *Thèse* de M. J. Coulon.

On pourra être étonné que je ne cite pas avec plus de détails les travaux de Kirchhoff, par exemple, si importants; mais c'est que M. Volterra est le seul géomètre qui ait étudié les équations (A) au point de vue qui est celui de ce Mémoire.

INTRODUCTION.

UNE FORMULE FONDAMENTALE. LA NOTION DE CONORMALE.

1. Soit une surface *fermée* Σ, soit W le volume intérieur, soient α, β, γ les cosinus de la *normale extérieure* en un point, soient u et v des fonctions de x, y, z, admettant des dérivées des deux premiers ordres; représentons, d'autre part, par le symbole A l'opération

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

et par le symbole D_n l'opération

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}-\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

La même méthode qui donne la célèbre *formule de Green*, fondamentale dans la Physique mathématique, donnera

$$\iiint\limits_{(W)}[uA(v)-vA(u)]\,d\tau=\iint\limits_{(\Sigma)}[uD_n(v)-vD_n(u)]\,d\omega.$$

Mais ceci, on peut le dire, est banal. C'est la forme employée par M. Vito Volterra dans son Mémoire (1) et par M. Joseph Coulon dans sa première *Note* (2) du 19 mars 1900. J'ai indiqué, dans ma *Note* (3) du 11 février 1901, que D_n n'est pas un pur symbole schématique, mais une *dérivée véritable* suivant la direction qui a pour cosinus : α, β, $-\gamma$. Cette direction, symétrique de la normale exté-

(1) *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (*Acta mathematica*, t. XVIII, 1894).

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

(3) *Ibid.*

rieure par rapport au plan xy, je l'ai désignée sous le nom de CONORMALE.

Ainsi D_n s'écrira $\frac{d}{dN}$ et l'on aura la *formule fondamentale :*

$$(G) \qquad \iiint_{(W)} [uA(v) - vA(u)]\,d\tau = \iint_{(\Sigma)} \left[u\frac{dv}{dN} - v\frac{du}{dN}\right] d\omega.$$

2. Considérons un plan à 45° sur l'horizon (xy) ou une surface polyédrale de plans de cette espèce, ou une surface enveloppe de tels plans, par exemple un cône dont les *génératrices* soient à 45°. Pour toutes ces surfaces l'on *voit* que la direction conormale est située sur la surface même, d'où ce théorème :

THÉORÈME. — *Pour ces surfaces* privilégiées, *le fait de donner sur elles la valeur d'une fonction détermine la valeur de la dérivée conormale de cette fonction; en particulier, si une fonction est* nulle *sur une surface privilégiée, il en est de même de sa dérivée conormale.*

Dans sa *Note* (¹) du 15 juillet 1901, M. J. Coulon a étendu ce théorème à l'équation générale du type hyperbolique à trois variables. Dans sa *Thèse* (²), il a fait un usage constant de mon théorème en voulant bien adopter aussi la désignation de conormale.

Les surfaces que j'appelle *privilégiées,* d'après ce théorème tout intuitif, font partie des *Multiplicités caractéristiques* de M. J. Beudon (³), dont l'étude a été poursuivie par M. J. Hadamard (⁴).

Ces préliminaires posés, nous pouvons aborder l'étude de la méthode de M. Volterra.

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

(²) *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre,* Paris, Hermann.

(³) *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXV.

(⁴) Leçons professées au Collège de France en décembre 1900 et Leçons publiées chez Hermann, déjà citées.

PREMIÈRE PARTIE.

PROBLÈME INTÉRIEUR.

CHAPITRE I.

INTÉGRATION DE $A(u) = F(x, y, z)$, LORSQUE LA SURFACE QUI PORTE LES DONNÉES EST DÉCOUPÉE INTÉRIEUREMENT D'UNE MANIÈRE UNIQUE PAR TOUT CÔNE A AXE VERTICAL ET DONT LES GÉNÉRATRICES SONT INCLINÉES A 45°.

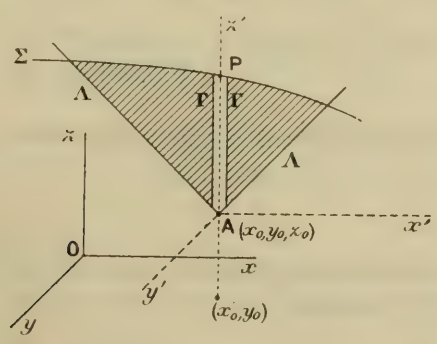
Principe de la méthode d'intégration.

1. Considérons la formule (G) et cherchons une fonction $V(x, y, z)$ telle que

$$A(V) \equiv 0,$$

telle que V soit *nulle* sur un cône Λ à 45°, de sommet A.

Fig. 1.



Nous sommes alors certain que, sur Λ, l'on a

$$\frac{dV}{dN} = 0.$$

d'après notre théorème.

(MM. Volterra et Coulon étaient obligés de faire un calcul pour s'en assurer.)

En plus, $V(x, y, z)$ sera *infinie* sur l'axe vertical Az'.

Dans ces conditions, si l'on applique la formule (G) au volume marqué par des hachures, si u et $\frac{du}{dN}$ sont donnés sur Σ, la formule (G) se réduira à une intégrale simple étendue de A en P égalée à un terme connu.

Une inversion donnera $u(A)$.

Intégration.

Soit $A : (x_0, y_0, z_0)$, soient

$$z' = z - z_0, \qquad x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0,$$
$$r^2 = x'^2 + y'^2;$$

soit

$$\theta = \frac{z'}{r} > 1.$$

Cherchons une fonction $V = \varphi(\theta)$. L'on a

$$A(V) \equiv \frac{1}{r^2}\left[(\theta^2 - 1)\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \theta\frac{d\varphi}{d\theta}\right] = 0,$$
$$V = \varphi = \log\left[\frac{z'}{r} + \sqrt{\left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 1}\right],$$

V est bien *nulle* sur le cône A, qui a pour équation

$$\frac{z'}{r} = 1.$$

Soit $r = \varepsilon$ l'équation du cylindre vertical Γ, de rayon infiniment petit. La formule (G) donne

$$-\iiint_{(W)} V F(x, y, z)\, d\tau = \iint_{(\Sigma+\Gamma)} \left(u\frac{dV}{dN} + V\frac{du}{dN}\right) d\omega.$$

Or

$$\iint_{(\Gamma)} V\frac{du}{dN}\, d\omega = \iint_{(\Gamma)} V\frac{du}{dN}\, \varepsilon\, d\alpha\, dz$$

(α étant l'angle polaire) et comme

$$\lim_{\varepsilon=0}(V\times\varepsilon)=0,$$

ce terme est nul à la limite.

Puis, sur Γ, l'on a

$$\frac{dV}{dN}=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{z'}{r\sqrt{z'^2-r^2}},$$

et u est fonction de z seul. On a donc

$$\lim_{r=0}\iint_{(\Gamma)}u\frac{dV}{dN}d\omega=\lim_{r=0}\iint\frac{z'}{r\sqrt{z'^2-r^2}}u(x_0,y_0,z)r\,d\alpha\,dz$$
$$=2\pi\int_{z_0}^{z_1}u(x_0,y_0,z)\,dz.$$

D'où

$$-\iiint_{(W)}VF\,d\tau-\iint_{(\Sigma)}\left(u\frac{dV}{dN}-V\frac{du}{dN}\right)d\omega=-J_A=2\pi\int_{z_0}^{z_1}u(z)\,dz.$$

Par inversion,

$$2\pi u(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial J_A}{\partial z_0}.$$

Et c'est, établie plus rapidement, la formule donnée par M. Volterra [formule (2) de la page 183)].

2. L'énoncé du théorème (p. 184) manque de clarté en ce qu'il y est question de dérivée *normale*. Nous énoncerons ainsi le THÉORÈME DE M. VOLTERRA :

Si un cône à 45°, ayant un point A *pour sommet, découpe d'une manière unique et intérieurement une surface* Σ, *sur laquelle sont données les valeurs de l'intégrale et de sa dérivée conormale, l'on peut obtenir la valeur de l'intégrale en ce point* A.

Ce qui a été dit dans l'Introduction (n° **2**) donne le complément suivant :

THÉORÈME COMPLÉMENTAIRE. — *Pour toute portion de la surface* Σ

qui a le caractère de surface privilégiée, *le fait de donner la valeur de l'intégrale est nécessaire et suffisant.*

Ces surfaces privilégiées jouent, dans l'intégration de $A(u) = F$, le rôle que jouent les droites caractéristiques $x \pm y = \text{const.}$ dans l'intégration de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \Phi(x, y),$$

rôle mis en lumière, d'une manière immédiate et sans aucune hypothèse sur la nature, analytique ou non, des fonctions, par M. E. Picard, dans une courte *Note* (¹).

La forme du terme connu

$$J_A = \iiint_{(W)} VF\, dz + \iint_{(\Sigma)} \left(u \frac{dV}{dN} - V \frac{du}{dN} \right) d\omega$$

montre que l'intégrale $u(x_0, y_0, z_0)$ peut être regardée comme la somme de deux intégrales, la première satisfaisant à

$$A(u) = 0,$$

avec les *conditions imposées* sur Σ; la deuxième satisfaisant à

$$A(u) = F(x, y, z),$$

avec des données *nulles* sur Σ. Mais lorsque nous connaissons ainsi la forme analytique de $u(x_0, y_0, z_0)$, *il nous reste encore un travail important* à faire.

L'on ne peut, en effet, *affirmer* a priori *la réciproque* du théorème qui vient d'être énoncé. M. Volterra *n'a pas étudié l'intégrale et ses dérivées*, et c'est ce que nous devons faire maintenant afin

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1899. *Voir* aussi les *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, par G. Darboux.

de *reconnaître si l'intégrale trouvée* est une *solution* du problème, c'est-à-dire si sa valeur au point (x_0, y_0, z_0) tend vers la valeur donnée u_1, lorsque le point (x_0, y_0, z_0) tend à se confondre avec le point (1) de Σ (où la valeur donnée est u_1).

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE ET DE SES DÉRIVÉES, LES DONNÉES A LA FRONTIÈRE ÉTANT NULLES.

L'on peut faire cette étude *directement* en partant de la *définition* même de la dérivée; c'est ce que je montrerai tout d'abord en obtenant une forme explicite de $u(x_0, y_0, z_0)$. L'on pourrait faire de même pour les dérivées, et l'on rencontre des études intéressantes d'*infiniment petits;* mais c'est *long* et, pour l'étude complète, je prendrai un autre point de départ.

1. *Étude directe* [1] *de l'intégrale.* — L'on a :

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial J_A}{\partial z_0},$$

si l'on convient d'écrire

$$J_A = \iiint_{(Abc)} F(x, y, z) V_A \, d\tau.$$

J'affecte la lettre V de l'indice A pour bien montrer que la fonction auxiliaire V varie avec le point A (x_0, y_0, z_0).

Nous devons évaluer la dérivée $\frac{\partial J_A}{\partial z_0}$.

Donnons pour cela à z_0 un accroissement infiniment petit dz_0. A vient en A′ et l'on a

$$J_{A'} = \iiint_{(A'b'c')} F(x, y, z) V_{A'} \, d\tau.$$

---

[1] Communiqué à la *Société mathématique de France*, juin 1901.

La dérivée cherchée est

$$\frac{J_{A'} - J_A}{dz_0}.$$

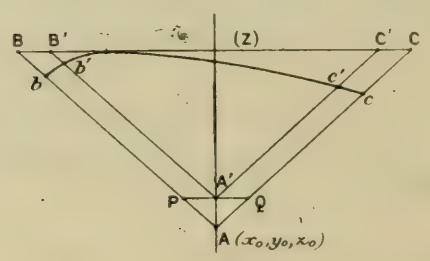
Évaluons

$$J_{A'} - J_A = -H.$$

On a évidemment

$$J_A = \iiint_{(A'b'c')} FV_A\, d\tau + \iiint_{(AA'bb'cc')} FV_A\, d\tau.$$

Fig. 2.



Considérons d'abord la deuxième intégrale; V_A ayant un *signe constant*, l'on peut faire sortir F de l'élément différentiel (théorème de la moyenne); nous avons donc à calculer

$$\iiint V_A\, d\tau,$$

le volume d'intégration étant le volume compris entre les deux cônes.

Comme, d'ailleurs, on a

$$V_A > 0,$$

nous augmenterons l'intégrale en augmentant le volume, c'est-à-dire en remplaçant S par le *plan horizontal le plus élevé* qui ait un point commun avec S (il peut être tangent à S, il peut ne l'être pas).

Application systématique du *théorème de la moyenne*, emploi de ce plan horizontal *majorant*, voilà d'ailleurs *la marche constamment suivie* dans ces recherches.

Calculons donc

$$\iiint_{(AA'BB'CC')} V_A \, d\tau.$$

Le volume se décompose naturellement en deux parties : APQ et BB′PA′QCC′, mais la fonction V_A jouit d'une propriété remarquable. Pour tout *volume conique régulier* l'on a

$$\iiint V_A \, d\tau = \iiint d\tau.$$

Donc notre intégrale relative au volume APQ est égale à $\frac{\pi}{3}\overline{AA'}^3$ et, comme $\overline{AA'} = dz_0$, elle est du *troisième ordre*.

Évaluons l'intégrale relative à BB′PA′QCC′. Soit

$$\int_{z_0+dz_0}^{Z} dz \int_0^{2\pi} d\hat{a} \int_{z-z_0-dz_0}^{z-z_0} \log\left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^2 - 1}\right] r\,dr$$

(Z est la cote du plan majorant).

Or

$$\int \log\left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^2 - 1}\right] r\,dr$$
$$= \left\{\frac{r^2}{2}\log\left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^2 - 1}\right]\right\} - \frac{z-z_0}{2}\left\{\sqrt{(z-z_0)^2 - r^2}\right\}.$$

Ici, en prenant pour r les limites voulues : $z - z_0$ et $z - z_0 - dz_0$, l'on a

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{(z-z_0-dz_0)^2}{2}\log\left[\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0}\right)^2 - 1}\right] \\ &+\frac{z-z_0}{2}\sqrt{2(z-z_0)dz_0 - dz_0^2}. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale relative à l'angle polaire $\widehat{a}$ donne 2π (constante sans importance). Il reste à intégrer cette dernière expression par rapport à z.

Intégrons, par parties, le premier terme. L'on obtient [1]

$$-\frac{1}{6}(Z-z_0-dz_0)^3\log\left[\frac{Z-z_0}{Z-z_0-dz_0}+\sqrt{\left(\frac{Z-z_0}{Z-z_0-dz_0}\right)^2-1}\right]$$
$$+\int_{z_0+dz_0}^{Z}\frac{(z-z_0-dz_0)^3}{6}\,\frac{-dz_0}{(z-z_0-dz_0)\sqrt{2(z-z_0)\,dz_0-dz_0^2}}\,dz,$$

il faut ajouter l'intégrale du deuxième terme

$$+\int_{z_0+dz_0}^{Z}\frac{z-z_0}{2}\sqrt{2(z-z_0)\,dz_0-dz_0^2}\,dz.$$

Laissons le terme tout intégré et réunissons les deux intégrales précédentes; cela donne, pour élément différentiel,

$$\frac{1}{6\sqrt{2(z-z_0)\,dz_0-dz_0^2}}\left\{3(z-z_0)[2(z-z_0)\,dz_0-dz_0^2]-(z-z_0-dz_0)^2\,dz_0\right\}.$$

Les termes en dz_0^2 et dz_0^3 dans le crochet donnent naissance à des termes en $dz_0^{\frac{3}{2}}$ et $dz_0^{\frac{5}{2}}$ qui ne jouent aucun rôle puisque, pour avoir la dérivée, on divisera par dz_0, et il reste à considérer

$$\int_{z_0+dz_0}^{Z}\frac{5}{6}\,\frac{(z-z_0)^2\,dz_0}{\sqrt{2(z-z_0)\,dz_0-dz_0^2}}\,dz=\frac{5}{\sqrt{2}6}\sqrt{dz_0}\int_{z_0+dz_0}^{Z}\frac{(z-z_0)^2\,dz}{\sqrt{z-z_0-\frac{dz_0}{2}}}.$$

Ici encore nous n'avons à conserver que

$$\frac{5}{6\sqrt{2}}\sqrt{dz_0}\,\frac{2}{5}(Z-z_0)^{\frac{5}{2}},$$

le reste étant d'ordre $\frac{3}{2}$ au moins en dz_0.

---

(1) En effet, le *terme soustractif* de la partie intégrée est *nul*, car, si l'on pose

$$z-z_0-dz_0=\varepsilon,$$

l'on doit avoir

$$\varepsilon=(z-z_0)^{1+h}.$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon=0}\left\{\varepsilon^3\log\left[\frac{z-z_0}{\varepsilon}+\sqrt{\left(\frac{z-z_0}{\varepsilon}\right)^2-1}\right]\right\}=0.$$

Nous obtenons en somme

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda\, dz_0^{\frac{3}{2}}\\&\quad-\frac{1}{6}(Z-z_0-dz_0)^3\log\left[\frac{Z-z_0}{Z-z_0-dz_0}+\sqrt{\left(\frac{Z-z_0}{Z-z_0-dz_0}\right)^2-1}\right]\\&\quad+\frac{\sqrt{2}}{6}(Z-z_0)^{\frac{5}{2}}\sqrt{dz_0}.\end{aligned}\right.$$

Développons en série, en posant $u = Z - z_0$,

$$\left\{\left(\frac{1}{1-\frac{dz_0}{u}}\right)^2-1\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{dz_0}{u}}\left\{1+\frac{3}{4}\frac{dz_0}{u}+\frac{23}{32}\left(\frac{dz_0}{u}\right)^2+\ldots\right\},$$

$$\frac{1}{1-\frac{dz_0}{u}}+\left\{\left(\frac{1}{1-\frac{dz_0}{u}}\right)^2-1\right\}^{\frac{1}{2}}=1+\sqrt{2}\sqrt{\frac{dz_0}{u}}+\frac{dz_0}{u}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{\frac{dz_0}{u}}\right)^3$$
$$+\left(\frac{dz_0}{u}\right)^2+\frac{\sqrt{2}.23}{32}\left(\sqrt{\frac{dz_0}{u}}\right)^5-\ldots.$$

Or

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\ldots.$$

D'où, pour le logarithme, ce développement :

$$\sqrt{2}\sqrt{\frac{dz_0}{u}}+\frac{dz_0}{u}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{\frac{dz_0}{u}}\right)^3+\ldots-\left[\frac{dz_0}{u}+\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{dz_0}{u}}\right)^3+\ldots\right].$$

Si l'on multiplie par $-\frac{1}{6}(u-dz_0)^3$ et que l'on tienne compte du troisième terme en $\sqrt{dz_0}$, l'on voit que l'on a en facteur $(dz_0)^{\frac{5}{2}}$ dans la somme des deuxième et troisième termes. Tenant compte du premier $\lambda(dz_0)^{\frac{3}{2}}$, l'on obtient en somme, μ étant *fini* quel que soit dz_0,

$$J_A=\mu(dz_0)^{\frac{3}{2}}+\iiint_{(A'b'c')}FV_A\,dx\,dy\,dz.$$

Le second terme est seul à conserver et l'on a

$$H=\iiint_{(A'b'c')}F(x,y,z)[V_A(x,y,z)-V_{A'}(x,y,z)]\,d\tau.$$

Remarquons maintenant que l'on peut écrire :

$$V_A(x, y, z) = V_{A'}(x, y, z + dz_0),$$

d'où

$$\begin{aligned} &V_A(x, y, z) - V_{A'}(x, y, z) \\ &\quad = V_{A'}(x, y, z + dx_0) - V_{A'}(x, y, z) = dz_0 \frac{\partial V_{A'}(x, y, z)}{\partial z} \quad (^1). \end{aligned}$$

Lorsque dz_0 s'approche de zéro, A′ vient en A, $V_{A'}$ devient V_A, et l'on a

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = -\iiint_{(Abc)} F \frac{\partial V_A}{\partial z} d\tau = \iiint_{(Abc)} F \frac{\partial V_A}{\partial z_0} d\tau,$$

résultat assez surprenant par sa simplicité.

D'ailleurs $\frac{\partial V_A}{\partial z}$ ayant un signe constant, on peut écrire

$$\begin{aligned} 2\pi u(x_0, y_0, z_0) &= -F(\xi, \eta, \zeta) \iiint_{(Abc)} \frac{\partial V_A}{\partial z} d\tau \\ &= -F(\xi, \eta, \zeta)\theta_A \iiint_{(ABC)} \frac{\partial V_A}{\partial z} \delta\tau, \end{aligned}$$

ou enfin

$$u(x_0, y, z_0) = -F(\xi, \eta, \zeta)\theta_A \frac{1}{2}(Z - z_0)^2 \qquad (0 < \theta_A < 1).$$

2. *Étude de l'intégrale d'après une formule d'Ostrogradski.* — Comme nous le disions, il serait assez long d'étudier directement les dérivées de

$$u(x_0, y_0, z_0).$$

---

(1) Pour être rigoureux on ne peut appliquer cette formule que dans une région où $V_{A'}$ et $\frac{\partial V_{A'}}{\partial z}$ soient *finis*.

Or la première fonction est *infinie* sur la verticale passant par A′ et la deuxième est *infinie* sur le cône A′B′C′. On isolera donc la verticale par un petit *cylindre vertical* et le cône A′B′C′ par un *cône* ou un *hyperboloïde* intérieur à ce cône. Dans les petits volumes ainsi isolés, on remplacera $(V_A - V_{A'})$ par $2V_{A'}$ et l'on verra que l'*influence* de ces volumes infiniment petits est *nulle*.

Nous allons donc reprendre tout ceci en faisant usage d'une formule, convenablement interprétée [1], d'Ostrogradski.

Établissons, d'après M. C. Jordan [2], la formule d'Ostrogradski, simplifiée pour notre usage. Soit

$$I = \iiint_{W(\lambda)} \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

le champ d'intégration W, comme φ, dépend d'un paramètre λ.

$$I + \Delta I = \iiint_{(W+\Delta W)} (\varphi + \Delta\varphi)\, dx\, dy\, dz.$$

Nous voulons calculer

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \lim \frac{\Delta I}{\Delta \lambda}.$$

Pour cela, amenons les deux intégrales à avoir *même* champ d'intégration. Nous y arriverons en faisant correspondre à tout point (x, y, z) de $(W + \Delta W)$ un point (X, Y, Z) de W par les formules :

$$x = X + \xi,$$
$$y = Y + \eta,$$
$$z = Z + \zeta,$$

avec la condition que la transformation vaille pour passer d'une frontière à l'autre. ξ, η, ζ sont des fonctions *infiniment petites* assujetties à cette seule condition.

Alors

$$I + \Delta I = \iiint_{(W)} \Psi J\, dX\, dY\, dZ,$$

---

(1) Note de l'auteur dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1902.

(2) *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. III, p. 530. Paris, Gauthier-Villars.

J étant le jacobien,

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial\xi}{\partial X} & \frac{\partial\xi}{\partial Y} & \frac{\partial\xi}{\partial Z} \\ \frac{\partial\eta}{\partial X} & 1+\frac{\partial\eta}{\partial Y} & \frac{\partial\eta}{\partial Z} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial X} & \frac{\partial\zeta}{\partial Y} & 1+\frac{\partial\zeta}{\partial Z} \end{vmatrix},$$

Ψ étant la fonction $\varphi + \Delta\varphi$ exprimée en X, Y, Z.

On a

$$J = 1 + \frac{\partial\xi}{\partial X} + \frac{\partial\eta}{\partial Y} + \frac{\partial\zeta}{\partial Z} + \text{inf. petit.}$$

Or

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(X, Y, Z) + \xi\frac{\partial\varphi}{\partial X} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial Y} + \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial Z} + \ldots$$

et

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \Delta\varphi(X, Y, Z) + \ldots = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \ldots.$$

Donc

$$\Psi J = \varphi(X, Y, Z) + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \left[\frac{\partial}{\partial X}(\varphi\xi) + \frac{\partial}{\partial Y}(\varphi\eta) + \frac{\partial}{\partial Z}(\varphi\zeta)\right] + \ldots.$$

Enfin, l'on a

$$(1) \quad \Delta I = \int\int\int_{(W)} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial}{\partial X}(\varphi\xi) + \frac{\partial}{\partial Y}(\varphi\eta) + \frac{\partial}{\partial Z}(\varphi\zeta)\right] dX\,dY\,dZ;$$

c'est la formule cherchée. Appliquons-la. Soit

$$W = A\,bc.$$

Pour avoir la dérivée par rapport à z_0, faisons

$$\lambda = z_0, \qquad \Delta\lambda = \Delta z_0 = \overline{AA'}.$$

Alors

$$W + \Delta W = A'b'c'.$$

Soient S″ et S′ les surfaces obtenues en *abaissant* S respectivement de Δz_0^2 et $\Delta z_0^2 + \Delta z_0$,

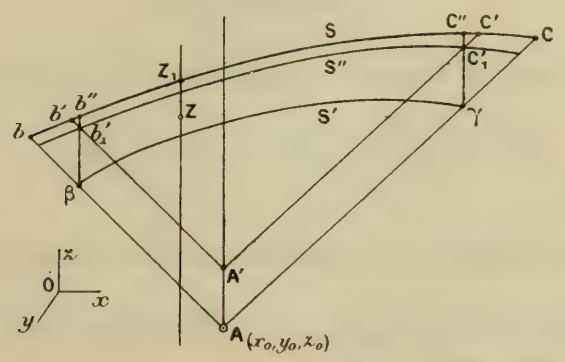
$$\text{vol. } A'b'c = \text{vol. } A'b'_1c'_1 + \text{vol. } (b'c', b'_1c'_1),$$

nous ferons correspondre $A'b'_1c'_1$ à $A\beta\gamma$ de W par les formules

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \Delta z_0 = \text{const.}$$

Puis nous ferons correspondre $(b'c', b'_1c'_1)$ à $(bc, \beta\gamma)$ de W ou, aux

Fig. 3.



infiniment petits d'*ordre supérieur* près : $(b''c'', b'_1c'_1)$ à $(b''c'', \beta\gamma)$ par les formules

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = (Z_1 - Z)\frac{\Delta z_0}{\Delta z_0 + \Delta z_0^2},$$

Z_1 étant la cote d'intersection de la verticale du point avec S.

La formule (1) donne ainsi

$$\Delta I = \iiint_{(Abc)} \frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\Delta z_0\, d\tau + \iiint_{(A\beta\gamma)} \Delta z_0 \frac{\partial\varphi}{\partial Z}\, d\tau$$
$$+ \iiint_{(bc,\beta\gamma)} \frac{\partial}{\partial Z}\left[\varphi(Z_1 - Z)\frac{\Delta z_0}{\Delta z_0 + \Delta z_0^2}\right] d\tau.$$

La deuxième intégrale donne une intégrale de surface

$$\Delta z_0 \iint_{(\text{cône } A\beta\gamma + \text{surf. } \beta\gamma)} \varphi\, dX\, dY.$$

La troisième intégrale donne, de même, une intégrale de surface

étendue à bc qui est nulle, puisque alors $Z_1 - Z = 0$ et une intégrale étendue à $\beta\gamma$

$$-\iint_{(\text{surf. }\beta\gamma)} \varphi\, \Delta z_0\, dX\, dY,$$

puisque, sur $\beta\gamma$, l'on a

$$Z_1 - Z \equiv \Delta z_0 + \Delta z_0^2.$$

Nous obtenons, en somme, en remplaçant maintenant X, Y, Z par x, y, z,

$$\Delta I = \Delta z_0 \left\{ \iiint_{(A\,bc)} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}\, d\tau + \iint_{(\text{cône } A\,bc)} \varphi\, dx\, dy \right\},$$

formule fondamentale dont nous allons poursuivre l'application.

3. *Expression de* $u(x_0, y_0, z_0)$. — Posons $\varphi = F V_A$, φ étant *nul* sur le cône, nous avons de suite

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \iiint_{(A\,bc)} F \frac{\partial V_A}{\partial z_0}\, d\tau,$$

expression obtenue directement (n° 11).

4. *Expression de* $\frac{\partial}{\partial z_0}\left\{ u(x_0, y_0, z_0) \right\}$. — Soit posé ici $\varphi = F \frac{\partial V_A}{\partial z_0}$, on a

$$2\pi \Delta u(x_0, y_0, z_0) = \Delta z_0 \left\{ \iiint_{(A\,bc)} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(F \frac{\partial V_A}{\partial z_0} \right) d\tau + \iint_{(\text{cône } A\,bc)} F \frac{\partial V_A}{\partial z_0}\, dx\, dy \right\}.$$

La formule ne doit pas être appliquée *brutalement*, mais, l'élément différentiel devenant *infini* sur le cône $A\,bc$,

$$(z - z_0)^2 - r^2 = 0,$$

je regarderai ce cône comme la limite, pour $\varepsilon = 0$, de l'hyperboloïde

$$(z - z_0)^2 - \rho^2 = \varepsilon^2.$$

D'ailleurs, $\frac{\partial V_A}{\partial z_0}$ et $\frac{\partial^2 V_A}{\partial z_0^2}$ ayant toujours le même signe dans le domaine intérieur au cône, nous pouvons d'abord faire sortir F de l'intégrale; ensuite *majorer* en remplaçant S par H, le plan horizontal *le plus haut*, de côté Z, *ayant un point commun avec* S. On a

$$\left|\iiint_{(Abc)}\right| < \left|\iiint_{(ABC)}\right|,$$

$$\begin{aligned}\iiint_{(ABC)} \frac{\partial^2 V}{\partial z_0^2}\, d\tau &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{z_0}^{Z} dz \int_0^{\rho} \frac{-(z-z_0)}{[(z-z_0)^2 - r^2]^{\frac{3}{2}}}\, r\, dr \\ &= 2\pi \int_{z_0}^{Z} (z-z_0)\left[\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{[(z-z_0)^2-\rho^2]^{\frac{1}{2}}}\right] dz \\ &= 2\pi \int_{z_0}^{Z} dz - \frac{2\pi}{\varepsilon}\int_{z_0}^{Z} (z-z_0)\, dz.\end{aligned}$$

Pour le cône, nous avons encore

$$\left|\iint_{(Abc)}\right| < \left|\iint_{(ABC)}\right|.$$

Nous considérerons le cône comme la limite de l'hyperboloïde

$$(z-z_0)^2 - \rho^2 = \varepsilon'^2,$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial z_0} = \lim\left(-\frac{1}{\varepsilon'}\right) \qquad \text{et} \qquad \iint dx\, dy = -\pi(Z-z_0)^2$$

(puisque la normale extérieure fait, avec Oz, un angle obtus).

En somme

$$\begin{aligned}2\pi\,\Delta u = \Delta z_0 \Big\{ &\theta_A F(\xi, \eta, \zeta)\left[2\pi(Z-z_0) - \frac{\pi}{\varepsilon}(Z-z_0)^2\right] \\ &+ \theta'_A F(\xi', \eta', \zeta')\frac{\pi}{\varepsilon'}(Z-z_0)^2\Big\},\end{aligned}$$

avec $0 < \theta_A < 1$, $0 < \theta'_A < 1$ (puisque l'on a remplacé Abc par ABC), (ξ, η, ζ) étant un certain *point moyen* du volume Abc et (ξ', η', ζ') un *point moyen* de la surface du cône Abc.

Choisissons ε et ε' tels que les *deux infinis se détruisent* et il reste

$$\frac{\partial}{\partial z_0} u(x_0, y_0, z_0) = \theta_A F(\xi, \eta, \zeta)[Z - z_0]$$

(Z est la cote du *plan majorant* H). Mais le fait de prendre ainsi les deux infiniment petits ε et ε' tels que les deux termes infinis se détruisent peut paraître artificiel et laisse subsister un doute. Je vais donc montrer autrement que le coefficient de Δz_0 est bien *fini*.

On a

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left(F\frac{\partial V}{\partial z_0}\right) = \frac{\partial V}{\partial z_0}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(F\frac{\partial V}{\partial z_0}\right),$$

car, évidemment,

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z_0}; \qquad \frac{\partial F}{\partial z_0} \equiv 0,$$

d'où $\iiint\limits_{(Abc)}$, premier terme du coefficient de Δz_0, est égale à

$$\iiint\limits_{(Abc)} \frac{\partial V}{\partial z_0}\frac{\partial F}{\partial z}\,d\tau - \iiint\limits_{(Abc)} \frac{\partial}{\partial z}\left(F\frac{\partial V}{\partial z_0}\right)d\tau$$
$$= \iiint\limits_{(Abc)} \frac{\partial V}{\partial z_0}\frac{\partial F}{\partial z}\,d\tau - \iint\limits_{(\text{cône}\,Abc + \text{surf.}\,bc)} F\frac{\partial V}{\partial z_0}\,dx\,dy.$$

Le coefficient de Δz_0 est donc

$$\iiint\limits_{(Abc)} \frac{\partial V}{\partial z_0}\frac{\partial F}{\partial z}\,d\tau - \iint\limits_{(bc)} F\frac{\partial V}{\partial z_0}\,dx\,dy,$$

et l'on voit bien que les deux intégrales infinies sur le cône Abc se détruisent.

On peut, d'ailleurs, en majorant les deux intégrales ci-dessus, retrouver la forme de la dérivée relative à z_0.

3. *Expression de* $\frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, y_0, z_0)$. — Pour obtenir la dérivée en x_0, ou en y_0, nous emploierons la même formule d'Ostrogradski, adaptée d'une manière un peu différente. S étant la surface qui porte

les données (nulles), S′ et S″ seront les surfaces résultant d'une translation parallèle à ox et égale respectivement à $(\Delta x_0 + \Delta x_0^2)$ et à Δx_0^2.

Il est inutile de tout répéter, soit

$$J = \iiint_{(Abc)} \varphi \, d\tau.$$

L'on trouve

$$\Delta J = \Delta x_0 \left\{ \iiint_{(Abc)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} d\tau + \iint_{(\text{cône } Abc)} \varphi \, dy \, dz \right\},$$

$$\Delta J = \Delta x_0 \left\{ \iiint_{(Abc)} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(F \frac{\partial V}{\partial z_0} \right) d\tau + \iint_{(\text{cône } Abc)} F \frac{\partial V}{\partial z_0} dy \, dz \right\}.$$

L'on verrait, comme au n° **4**, que le coefficient de Δx_0 est *la partie finie* de l'intégrale de volume, car il y a deux termes infinis sur le cône Abc qui se détruisent exactement. Mais, si l'on remarque que l'on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_0 \partial z_0} = \frac{-r \cos \alpha}{[(z - z_0)^2 - r^2]^{\frac{3}{2}}},$$

l'on constate que cette fonction est *négative* à droite du plan parallèle à zoy passant par A, *positive* à gauche de ce plan. Il faut donc appliquer séparément le théorème de la moyenne dans chaque région, en même temps que l'on majorera par le plan H de cote Z.

Donc

$$\iiint_{(Abc)} F \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial V}{\partial z_0} \right)$$
$$= F(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \iiint_{(Agc)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) d\tau + F(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \iiint_{(Agb)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) d\tau;$$

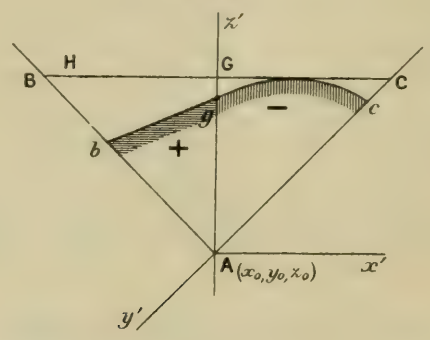
en majorant, nous prendrons les intégrales dans les volumes AGC et AGB qui, par la formule de Green, donnent des intégrales de surface :

1° Dans le plan AG, on a $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$;

2° Sur le cône ABC, on a des termes infinis dont, on l'a vu, il n'y a pas à tenir compte;

3° Nous avons enfin des intégrales étendues au cercle BC :

Fig. 4.



Pour la première

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha \int_0^{Z-z_0} \frac{-(Z-z_0)}{r\sqrt{(Z-z_0)^2-r^2}}\, r\, dr$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha (Z-z_0)[\arcsin(0) - \arcsin(1)] = -\pi[Z-z_0],$$

et pour la seconde, les limites pour α seront $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, d'où

$$+\pi[Z-z_0];$$

en somme

$$2\pi\Delta u(x_0, y_0, z_0) = \Delta x_0 . \pi[Z-z_0][\theta_{A,2} F(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) - \theta_{A,1} F(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)]$$

(les deux coefficients θ sont compris entre 0 et 1, égaux à 1 lorsque *bc* se confond avec BC) Enfin

$$\frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\theta_{A,2} . F_2 - \theta_{A,1} . F_1}{2}[Z-z_0].$$

Il est bien assuré que nous avons une expression analogue pour $\frac{\partial}{\partial y_0} u(x_0, y_0, z_0)$, par symétrie.

Remarque. — L'on peut calculer les trois *dérivées secondes;* l'on trouve, pour chacune,

$$\theta . F(\xi, \eta, \zeta),$$

θ ayant une limite supérieure facile à évaluer.

6. Conclusion. — Il résulte de tout ce qui précède que l'intégrale et ses dérivées premières prennent les valeurs données *zéro* lorsque (x_0, y_0, z_0) vient sur S si $(Z - z_0)$ tend vers *zéro,* lorsque A se rapproche indéfiniment de S. Ceci a lieu s'il y a *unicité de section* de S par tout cône A et si les *plans tangents* de S *sont inclinés à moins* de 45° sur le plan xoy.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE, LES DONNÉES N'ÉTANT PAS NULLES A LA FRONTIÈRE.

Nous devons maintenant prendre $A(u) = 0$ avec des données *non nulles* sur S.

L'on peut faire d'abord une remarque du plus haut intérêt.

Comme dans le cas de l'équation hyperbolique à deux variables, cas traité par M. Picard [1], il faut d'abord qu'il y ait *unicité de section* de S par tout cône A.

Ceci *exclut* les surfaces S présentant certaines ondulations dans leur forme. Mais, en plus, l'on constate immédiatement ceci, c'est que les surfaces S ne doivent avoir *aucun plan tangent incliné à plus de* 45° sur le plan xoy. Sinon, en effet, soit un point A *infiniment voisin* d'un point (1) de S, le cône A du point A découperait dans S une aire *finie* et donc, certainement, la valeur de u en A ne dépendrait pas seulement de la valeur u_1 [2].

Réservons donc, pour l'instant, le cas où les données seraient

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1899. *Voir* aussi : J. Hadamard, *Note sur l'intégrale résiduelle* (*Soc. math. de France,* 1901.

[2] Par exemple l'*on ne peut prendre* pour S la surface étudiée par M. Volterra (p. 217), savoir : une portion de *cylindre vertical* limitée supérieurement par un *plan horizontal.*

portées par un cône Λ' et étudions l'intégrale à la frontière. Cette étude étant difficile nous prendrons d'abord pour S *un plan* P.

1. *Étude de l'intégrale à la frontière pour des données quelconques portées par un plan.* — Par rapport à des axes passant par A, soit

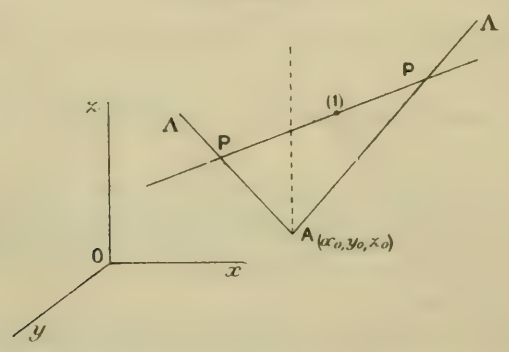
$$z' = ax' + by' + q$$

l'équation du plan P portant les données. L'on sait que l'on a

$$a^2 + b^2 < 1,$$

parce que le plan P doit avoir une inclinaison sur le plan horizontal moindre que 45°.

Fig. 5.



Nous étudierons donc $u(x_0, y_0, z_0)$ lorsque le point $A(x_0, y_0, z_0)$ vient sur P.

L'on voit que lorsque A s'approche d'un point (1) de P, *q tend vers zéro*. Ceci est fondamental à remarquer.

Reprenons la formule qui donne l'intégrale

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int\left(u\frac{dV}{dN} - V\frac{du}{dN}\right)d\sigma\right\},$$

le champ d'intégration étant l'aire de P intérieure à Λ.

Soit, en général,

$$I = \int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

L'on verra (IIe Partie, Chapitre I, n° 3) que l'on a

$$\Delta I = \int\int \left[\Delta\varphi + \frac{d}{dx}(\varphi\xi) + \frac{d}{dy}(\varphi\eta)\right] dx\, dy.$$

Comme les deux derniers termes donnent une intégrale étendue au *bord* de l'aire

$$\int \varphi.\chi.dl,$$

l'on voit que si φ *s'annule* sur le bord, l'on obtient la dérivée de I en dérivant la fonction φ sous le signe; mais si la fonction φ *ne s'annule pas* sur le bord, en particulier si elle devient *infinie*, il n'y a *aucun intérêt à scinder en deux parties l'intégrale* ΔI.

Donc

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = J_2 + J_1$$

en posant

$$J_2 = \int\int \frac{du}{dN} \frac{d\sigma}{\sqrt{(z - z_0)^2 - r^2}},$$

$$J_1 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int u \frac{dV}{dN} d\sigma\right\} = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int u_1 \frac{dV}{dN} d\sigma + \int\int (u - u_1) \frac{dV}{dN} d\sigma\right\},$$

u_1 désignant *la constante, valeur donnée* de u en (1) sur P. Mais la formule de M. Volterra représente l'intégrale du problème, *si elle existe*.

Ceci nous donne aussitôt une *identité importante :*

$$2\pi u_1 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int u_1 \frac{dV}{dN} d\sigma\right\}.$$

Nous allons donc prouver que J_2 d'une part, et d'autre part

$$J_3 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int (u - u_1) \frac{dV}{dN} d\sigma\right\},$$

tendent vers zéro, lorsque A tend vers (1).

Étude de J_2.

2. En désignant par $(\varphi)_M$ une valeur moyenne de la fonction φ dans un champ, l'on a

$$J_2 = \left(\frac{du}{dN}\right)_M \int\int \frac{d\sigma}{R},$$

où l'on a posé, pour simplifier,

$$R = \sqrt{(z - z_0)^2 - r^2}.$$

Or l'intégrale $\int\int \frac{d\sigma}{R}$ est facile à évaluer [1]; elle contient q en facteur.

Donc J_2 *s'annule* avec q.

Voici un premier résultat obtenu.

Étude de J_3.

3. On a

$$\frac{dV}{dN} = \frac{-1}{R}\left[\cos(n, z) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r)\right].$$

Ici $\cos(n, z) = K = \text{const.}$ et $dx\,dy = K\,d\sigma$.

Représentons par $\frac{\Gamma}{R}$ la quantité

$$-\frac{dV}{dN}.$$

J_3 est, à une constante multiplicative près, J_4

$$J_4 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int (u - u_1)\frac{\Gamma}{R}\,dx\,dy\right\}$$

Il faut voir que J_4 tend vers zéro lorsque A tend vers (1).

---

[1] L'on se sert des hyperboloïdes $(z - z_0)^2 - r^2 = \mu^2$ et l'on a une intégrale simple en μ.

D'après la forme trouvée pour ΔI, en remarquant que

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + a\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + b\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

nous avons

$$\frac{\partial I}{\Delta z_0} = \int\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z_0} + \frac{1}{\Delta z_0}\xi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\Delta z^0}\eta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + b\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \frac{1}{\Delta z_0}\varphi\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right]dx\,dy.$$

Ici $\varphi = (u - u_1)\frac{\Gamma}{R}$, d'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_0} = (u - u_1)\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\Gamma}{R}\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = (u - u_1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{\Gamma}{R}\frac{\partial u}{\partial x}$$

et deux expressions semblables pour $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Écrivons $J_4 = J_5 + J_6$

$$J_5 = \int\int(u - u_1)\left[\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{\xi}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Gamma}{R}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{a\xi + b\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{1}{\Delta z_0}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\Gamma}{R}\right]dx\,dy,$$

$$J_6 = \int\int\left[\frac{\xi}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a\xi + b\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial z}\right]\frac{\Gamma}{R}dx\,dy.$$

4. *Considérons* J_6,

$$\frac{\Gamma}{R} = \frac{K}{R} + \frac{1}{R}\frac{z - z_0}{r}\cos(n, r).$$

Le premier terme $\frac{K}{R}$ donne une partie de J_6, qui tend vers *zéro* avec q. En effet les quantités

$$\frac{\xi}{\Delta z_0}, \quad \frac{\eta}{\Delta z_0}$$

sont *finies* et *les dérivées de u sont supposées finies sur la surface* P, et l'on a vu que

$$\int\int \frac{d\sigma}{R}$$

tend vers *zéro* avec q.

Considérons le deuxième terme de $\frac{\Gamma}{R}$ et ne gardons sous le signe d'intégration que

$$\frac{1}{R}\,\frac{z-z_0}{r},$$

qui a un signe constant.

Sur le plan P on a

$$\frac{z-z_0}{r} = m + \frac{q}{r} < 1 + \frac{q}{r}$$

($m = a\cos\omega + b\sin\omega$ et $|m| < 1$ parce que $a^2 + b^2 < 1$).

Il reste donc à considérer

$$\int\int\left(1+\frac{q}{r}\right)\frac{1}{R}\,r\,dr\,d\omega.$$

Ceci comprend d'abord

$$\int\int \frac{d\sigma}{R},$$

qui tend vers *zéro* avec q; puis

$$q\int\int \frac{dr\,d\omega}{R}.$$

Il faut montrer que l'intégrale placée devant q reste *finie*.

Écrivons

$$R = \sqrt{(z-z_0)^2 - r^2} = \frac{q}{\sqrt{1-m^2}}\sqrt{1-u^2},$$

en posant

$$u = \frac{r(1-m^2) - mq}{q}$$

ou

$$du = \frac{1-m^2}{q}\,dr.$$

Laissant d'abord ω constant (c'est-à-dire $m = a\cos\omega + b\sin\omega = \text{const.}$), nous avons une intégration en u

$$\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

entre les limites $u = 1$, $u = -m$. Cette intégrale est *finie*.

Puis il faut intégrer en ω et, comme on a $1 - m^2 \neq 0$, cette intégration donne encore un nombre *fini*.

Donc J_6 tend vers *zéro* lorsque A tend vers le point (1).

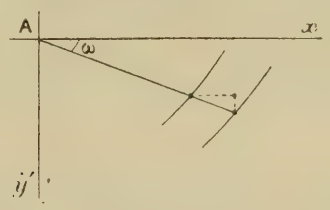
5. *Considérons* J_5.

Prenons d'abord le dernier terme

$$\iint (u - u_1)\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y}}{\Delta z_0}\,\frac{r}{R}\,r\,dr\,d\omega.$$

Jusqu'ici nous n'avons nullement fixé les variations de ξ et η, qui

Fig. 6.



sont simplement astreints à coïncider à la frontière avec les variations de l'x et de l'y de la frontière.

Nous pouvons poser

$$\xi = \rho\cos\omega, \qquad \eta = \rho\sin\omega$$

et prendre ρ *identiquement nul* dans l'aire, *sauf* dans une couronne touchant le bord de l'aire et intérieure à l'aire, comme cela a été indiqué déjà.

ρ contient, en tous cas, Δz_0 en facteur, de sorte que $\frac{1}{\Delta z_0}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right)$ est *fini* comme $\frac{\xi}{\Delta z_0}$ et $\frac{\eta}{\Delta z_0}$.

Dans ces conditions, le dernier terme de J_5 donne *zéro* lorsque q tend vers *zéro*; et ceci résulte de l'étude de J_6. Prenons ce qui reste de J_5, soit

$$J_7 = \iint (u - u_1)\left[\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{\xi}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Gamma}{R}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{a\xi + b\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Gamma}{R}\right)\right] dx\, dy;$$

$$\frac{\Gamma}{R} = \frac{1}{\sqrt{(z - z_0)^2 - r^2}}\left[K + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r)\right];$$

$$\cos(n, r) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}(a\cos\omega + b\sin\omega),$$

$$\cos\omega = \frac{x - x_0}{r}, \qquad \sin\omega = \frac{y - y_0}{r},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) = -\Gamma\frac{-(z - z_0)}{R^3} - \frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K}{R}\right)\cdot\cos\omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K}{R}\right)\cdot\sin\omega.$$

D'ailleurs

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K}{R}\right) = K\frac{r}{R^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{R}\frac{z - z_0}{r}\cos(n, r)\right] = \frac{1}{R}\frac{z - z_0}{r}\frac{\partial}{\partial x}[\cos(n, r)]$$
$$+ \frac{1}{R}\cos(n, r)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z - z_0}{r}\right) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)$$
$$= \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r)\frac{r}{R^3}\cos\omega + \frac{1}{R}\cos(n, r)\frac{-(z - z_0)}{r^2}\cos\omega$$
$$+ \frac{1}{R}\frac{z - z_0}{r}\frac{\partial}{\partial x}[\cos(n, r)].$$

D'après la forme de $\cos(n, r)$ ses dérivées x et y contiennent $\frac{1}{r}$ en facteur.

L'on a

$$\cos(n, r) = \frac{-1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}(a\cos\omega + b\sin\omega),$$

$$a\cos\omega + b\sin\omega = \frac{a(x-x_0)+b(y-y_0)}{r},$$

$$\xi\frac{\partial}{\partial x}[\cos(n, r)] + \eta\frac{\partial}{\partial y}[\cos(n, r)]$$
$$= \rho\left[\cos\omega\frac{\partial}{\partial x} + \sin\omega\frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{m}{r} - \frac{m}{r} = 0.$$

Le coefficient de $(u - u_1)$ dans J_7 est donc

$$\left[\Gamma\frac{z-z_0}{R^3} - \frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r}\right]\left(1 - \frac{\rho}{\Delta z_0}m\right)$$
$$+ \frac{\rho}{\Delta z_0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K}{R}\right)(\cos^2\omega + \sin^2\omega)\right.$$
$$+ \frac{z-z_0}{r}\cos(n, r)\frac{r}{R_3}(\cos^2\omega + \sin^2\omega)$$
$$- \frac{z-z_0}{R}\frac{\cos(n, r)}{r^2}(\cos^2\omega + \sin^2\omega)$$
$$\left. + \frac{1}{R}\frac{z-z_0}{r}\frac{m-m}{r}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{R^3}\left[K + \frac{z-z_0}{r}\cos(n, r)\right]\left[(z-z_0) - \frac{\rho}{\Delta z_0}m(z-z_0)\right]$$
$$+ \frac{1}{R^3}\left[K + \frac{z-z_0}{r}\cos(n, r)\right]\frac{\rho}{\Delta z_0}r$$
$$- \frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r}\left(1 - \frac{\rho}{\Delta z_0}m\right) - \frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r^2}\frac{\rho}{\Delta z_0}(z-z_0),$$

ou bien

$$\frac{1}{R^3}\left[K + \frac{z-z_0}{r}\cos(n, r)\right]\left[(z-z_0) - \frac{\rho}{\Delta z_0}m(z-z_0) + \frac{\rho}{\Delta z_0}r\right]$$
$$- \frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r}\left(1 - \frac{\rho}{\Delta z_0}m\right) + \frac{1}{R}\frac{\rho}{\Delta z_0}\frac{1}{r^2}(z-z_0)[-\cos(n, r)].$$

Représentons les trois termes ci-dessus par H_1, H_2, H_3 et reportons-

nous aux valeurs de J_5 et J_6 dont J_4 est la somme. Posons

$$H_4 = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\Delta z_0} \frac{r}{R}.$$

D'après ce qui a été dit, nous avons l'identité

$$2\pi u_1 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int u_1 \frac{dV}{dN} d\sigma\right\};$$

d'où

$$\text{const.} = \int\int (H_1 + H_2 + H_3 + H_4)\, d\sigma,$$

puisque, si l'on fait $u = 1$, tous les termes de J_6 disparaissent.

Or *les parties de cette intégrale relatives* à H_2, H_3, H_4 *ont un sens*, c'est-à-dire que les portions d'intégrales voisines de l'axe $r = 0$ et voisines du cône $z - z_0 = r$ donnent *zéro* à la limite quand on fait évanouir l'aire entourant la ligne singulière.

Donc il en est de même pour

$$\int\int H_1\, d\sigma.$$

6. Ayant constaté *ce fait fondamental* qu'il ne serait pas facile de mettre directement en évidence, il nous sera aisé de montrer que

$$\int\int (u - u_1)(H_1 + H_2 + H_3 + H_4)\, d\sigma$$

tend vers *zéro* lorsque A vient vers (1) [ou lorsque $(u - u_1)$ tend vers *zéro*, puisque la fonction est *continue*].

En effet, si u admet des dérivées premières finies, ce qui a été supposé, le théorème des accroissements finis permet d'écrire

$$u - u_1 = r.\psi,$$

ψ étant une fonction finie.

Il résulte des études précédentes que

$$\int\int \psi . r (H_2 + H_3 + H_4)\, r dr\, d\omega$$

tend vers *zéro* avec q.

Il reste à étudier

$$\iint (u - u_1) H_1 \, d\sigma.$$

Décomposons le champ en trois parties :

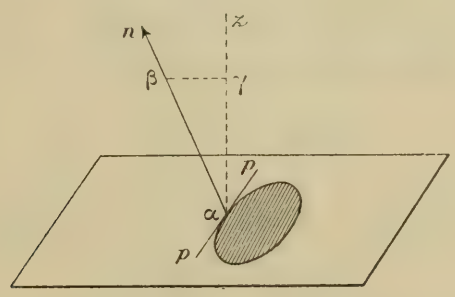
1° D_1, petite aire autour de l'axe : $r = 0$;

2° D_2, petite aire autour du cône, $z - z_0 = r$;

3° D_3, aire restante où H_1 reste *fini*.

Dans D_1 écrivons $u - u_1 = r.\psi$ et nous trouvons *zéro* pour l'intégrale lorsque D_1 s'évanouit.

Fig. 7.



Dans D_2 l'élément différentiel a un signe constant, car on a

$$\frac{z - z_0}{r} - 1 = \varepsilon$$

et

$$|\cos(n, r)| < K = \cos(n, z),$$

puisque

$$(n, z) < 45^\circ,$$

d'où

$$\overline{\beta\gamma} < \overline{\alpha\gamma},$$

d'où

$$K + \frac{z - z_0}{r} \cos(n, r) > 0;$$

d'ailleurs on a

$$1 - m > 0,$$

d'où

$$\frac{\rho}{\Delta z_0} [r - m(z - z_0)] > 0,$$

d'où

$$z - z_0 + \frac{\rho}{\Delta z_0}[r - m(z - z_0)] > 0.$$

L'élément de H_1 est positif. Donc nous pouvons mettre $(u - u_1)_M$ hors du signe d'intégration et nous avons encore une intégrale qui tend vers *zéro* lorsque D_2 s'évanouit.

Enfin, dans D_3, il y a une partie où l'élément est *négatif*, mais cette partie n'atteint pas le bord, d'après ce qui a été vu.

La partie négative, ombrée sur la figure, est tout entière à droite de la ligne *pp* du plan horizontal et à angle droit avec la normale.

Pour chaque région on peut faire sortir $(u - u_1)_M$ du signe d'intégration et à la limite, puisqu'on aura

$$\lim(u - u_1)_M = 0.$$

On trouvera en somme, *à la limite*, la valeur *zéro* pour

$$\int\int (u - u_1) H_1 \, d\sigma.$$

7. Conclusion. — La convergence est établie pour des données quelconques portées par un plan incliné de moins de 45°.

Il suffit de modifier très peu tout ce qui précède pour établir la convergence lorsque la surface S portant les données est *quelconque* avec plan tangent toujours incliné de moins de 45° et unicité de section par tout cône A.

L'on pourrait, de la même manière, étudier la *dérivée conormale*.

Pour la convergence de u à la frontière, il fallait que la fonction donnée u admette des *dérivées premières finies;* pour la convergence de $\frac{du}{dN}$ il faudra que u admette des *dérivées secondes finies*.

Tout est changé si la surface S est un cône A à 45°. Abordons l'étude de ce cas relativement auquel nous avons un théorème intéressant.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE A LA FRONTIÈRE LORSQUE LA FRONTIÈRE EST UN CÔNE CARACTÉRISTIQUE.

Ici, on l'a vu, si la surface des données est le cône Λ^1, de sommet Ω,

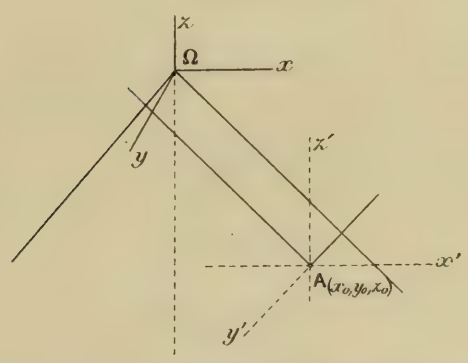
$$x^2 + y^2 = z^2,$$

le fait de donner u sur le cône détermine la valeur de $\frac{du}{dN}$ sur le cône.

PREMIÈRE SECTION.

On donne u non nul sur le cône.

Fig. 8



Il faut, comme précédemment, examiner l'expression

$$\int\int \frac{du}{dN} \frac{\partial\sigma}{\sqrt{(z-z_0)^2 - r^2}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int (u - u_1)\frac{dV}{dN}\, d\sigma\right\}$$

et voir *si elle tend vers zéro* lorsque le point $A(x_0, y_0, z_0)$ se rapproche du point (1) situé sur le cône Ω, u_1 étant la valeur donnée de u au point (1).

1. Écrivons encore $\sqrt{(z-z_0)^2 - r^2} = R$ et étudions l'intégrale

$$J_1 = \int\int \frac{d\sigma}{R}$$

étendue à l'aire découpée sur le cône Ω par le cône ayant son sommet en A.

Grâce à la symétrie, nous pouvons transformer l'intégrale de surface en *intégrale simple* avec la variable μ qui définit l'hyperboloïde

$$(z - z_0)^2 - r^2 = \mu^2.$$

L'hyperboloïde de paramètre μ et le cône Ω se coupent suivant l'ellipse

$$\left.\begin{array}{r}(z_0^2 - x_0^2)x'^2 + (z_0^2 - y_0^2)y'^2 - 2x_0y_0x'y' \\ - 2ux_0x' - 2uy_0y' - u^2\end{array}\right\} = 0.$$

L'on a posé

$$\lambda^2 - \mu^2 = 2u,$$
$$\lambda^2 = z_0^2 - x_0^2 - y_0^2.$$

L'aire de l'ellipse, à un facteur constant près, est

$$\left|\frac{\Delta}{\delta_2^3}\right|.$$

Or

$$\Delta| = u^2 z_0^4,$$
$$\left|\delta_2^3\right| = |z_0^3|.\lambda^3.$$

D'où, à une constante multiplicative près,

$$\sigma = \frac{z_0 u^2}{\lambda^3},$$

$$d\sigma = \frac{z_0}{\lambda^3} u du = \frac{z_0}{\lambda^3}(\lambda^2 - \mu^2)\mu d\mu.$$

Ainsi, l'on a

$$CJ_1 = z_0\left[\int_0^\lambda \frac{d\mu}{\lambda} - \int_0^\lambda \frac{\mu^2 d\mu}{\lambda^3}\right] = z_0\left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

Or ce qui marque que le point A vient sur le cône Ω, c'est que λ tend vers *zéro*. Puisque λ n'intervient pas dans l'intégrale J_1, *celle-ci ne*

tend pas vers zéro lorsque le point A *se rapproche de la surface des données.*

C'est l'*inverse* de ce qui arrivait avec une surface quelconque. Nous prévoyons que le *problème de la convergence* va se présenter avec une surface privilégiée, *d'une manière toute nouvelle.*

L'on a donc ce résultat, par le théorème de la moyenne :

$$J_2 = \int\int \frac{du}{dN}\frac{d\sigma}{R}$$

tend vers

$$\left(\frac{du}{\partial N}\right)_M C_1 z_0$$

lorsque A vient en (1); z_0 étant la cote de A, C_1 une constante et $\left(\frac{du}{dN}\right)_M$ une valeur moyenne de $\frac{du}{dN}$ sur la génératrice du cône Ω qui passe par (1).

2. Étudions maintenant

$$J_3 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int (u - u_1)\frac{dV}{dN}d\sigma\right\} = \frac{-\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int (u - u_1)\frac{\Gamma}{R}d\sigma\right\},$$

où l'on a posé

$$\Gamma = \cos(n, z) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r).$$

Suivons pas à pas l'étude analogue faite avec une surface quelconque.

L'équation du cône Ω est

$$-z = r_1$$

(nous conservons la lettre r pour la distance polaire au point A), d'où

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{r_1} = -\cos\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{r_1} = -\sin\theta.$$

$-\cos\theta$ et $-\sin\theta$ remplaceront a et b dans les dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$. Le

terme $(a\xi + b\eta)$ devient

$$-(\cos\theta.\xi + \sin\theta.\eta).$$

Or

$$\xi = \rho\cos\omega; \qquad \eta = \rho\sin\omega,$$

donc

$$(a\xi + b\eta)$$

devient

$$-\rho\cos(\omega - \theta) = \rho m_1.$$

Nous aurons m_1 à la place de m, mais m_1 étant *un cosinus,* l'on a toujours

$$|m_1| < 1,$$

inégalité importante à noter.

J_3 donne donc d'abord un terme J_4 qui contient $\frac{\Gamma}{R}$ en facteur dans l'élément différentiel

$$-J_4 = \int\int\left[+\frac{\xi}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\rho m_1}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial z} + (u - u_1)\frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\Delta z_0}\right]\frac{\Gamma}{R}\,d\sigma.$$

La partie entre crochets est *finie* si la fonction donnée u et ses premières dérivées sont *finies*. L'on a donc

$$|J_4| < C(\Gamma)_M \int\int \frac{d\sigma}{R}.$$

Or ceci tend vers *zéro* lorsque A vient sur le cône, car Γ devient *nul,* comme on le voit sur la figure,

$$\cos(n, z) = \cos\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{z - z_0}{r} = 1,$$

$$\cos(n, r) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4}.$$

Or

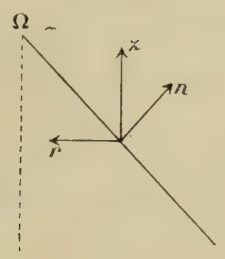
$$\Gamma = \cos(n, z) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r).$$

Donc

$$J_3 = J_4 + J_5$$

et J_4 devient *nul* quand A vient sur le cône.

Fig. 9.



3. Étudions J_5 :

$$-J_5 = \iint (u - u_1)\left[\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{\xi}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{\rho m_1}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Gamma}{R}\right)\right] d\sigma.$$

L'on a, sur tout le cône,

$$\cos(n, z) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

la dérivée est nulle.

Évaluons

$$\cos(n, r).$$

Les cosinus de n sont

$$\frac{x}{r_1\sqrt{2}}, \quad \frac{y}{r_1\sqrt{2}}, \quad \frac{-z}{r_1\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos(n, r) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta)$$

$$= \frac{m_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x(x - x_0) + y(y - y_0)}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}.$$

Les dérivées en z ou en z_0 sont *nulles* et il est inutile de calculer les

dérivées en x ou en y parce que l'on a ρ en facteur. Or ρ étant *nul* sur l'axe vertical de A, les puissances négatives de r ne peuvent empêcher la convergence.

En somme nous avons, pour coefficient de $(u - u_1)$,

$$\frac{1}{R^3}\left[\cos(n, z) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r)\right]\left[(z - z_0) - \frac{\rho}{\Delta z_0} m_1 (z - z_0) + \frac{\rho}{\Delta z_0} r\right],$$
$$- \frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r}\left(1 - \frac{\rho}{\Delta z_0} m_1\right),$$
$$+ \frac{1}{R}\frac{\rho}{\Delta z_0}\frac{1}{r^2}(z - z_0)[\lambda_1 \cos\omega + \lambda_2 \sin\omega - \cos(n, r)].$$

Par le même raisonnement qui a été fait pour le cas d'une surface quelconque, l'on voit que les intégrales contenant $\frac{1}{R^3}$, comme celles contenant $\frac{1}{R}$, *ont un sens*. L'on a

$$|m_1| < 1,$$

d'où

$$(z - z_0) - \frac{\rho}{\Delta z_0} m_1 (z - z_0) + \frac{\rho}{\Delta z_0} r > 0$$

et

$$\cos(n, r) = m_1 \frac{\sqrt{2}}{2},$$

d'où

$$\cos(n, z) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r) > 0$$

sur le bord du cône Λ^0, puisque, sur tout le cône Ω, l'on a :

$$\cos(n, z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et, sur le bord du cône Λ^0 de sommet A :

$$\frac{z - z_0}{r} = 1$$

D'ailleurs ρ est *identiquement nul*, sauf *au voisinage de ce bord*.

Donc $-J_5$ se réduit à deux termes, celui en

$$\frac{1}{R^3}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{z-z_0}{r}\cos(n,r)\right]$$

et celui en

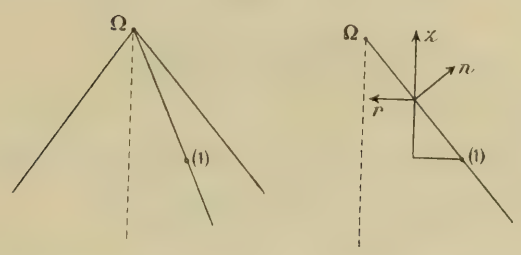
$$-\frac{1}{R}\frac{\cos(n,r)}{r}.$$

Le premier terme donne une intégrale J_6 qui se réduit à *zéro* lorsque A vient sur le cône Ω en (1), car on a, à la limite,

$$\frac{z-z_0}{r}=1,$$

$$\cos(n,r)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Fig. 10.



Donc enfin J_5 se réduit à

$$J_7=\int\int(u-u_1)\frac{1}{R}\frac{\cos(n,r)}{r}\,d\sigma.$$

4. Conclusion. — Il faut, *pour la convergence*, que l'on ait, *lorsque* A *vient en* (1),

$$\lim J_8=0$$

avec

$$J_8=\int\int\left[\frac{du}{dN}+\frac{u-u_1}{r}\cos(n,r)\right]\frac{d\sigma}{R}.$$

Je ne saurais dire si ceci est vérifié quelle que soit la fonction donnée (continue).

J'abandonne cette question pour l'instant, car l'on voit à quel point le maniement de J_8 est difficile :

Le champ d'intégration devient *nul* (étant infiniment petit du premier ordre);

L'élément d'intégration devient *infini*, d'une manière particulièrement difficile à manier.

L'on peut esquisser une vérification pour le cas où la *donnée* serait

$$u = z,$$

mais l'on ne voit pas bien, sur ce cas particulier, quel est le mécanisme général.

La vérification serait immédiate pour le cas suivant : donnée constante le long d'une génératrice du cône. Mais alors, la continuité de la donnée exigerait que la région du sommet du cône soit remplacée par une portion de surface autre et se raccordant avec le cône.

DEUXIÈME SECTION.

u est nul sur le cône, $F(x, y, z)$ n'est pas nul.

Nous devons revenir sur le cas de l'équation $A(u) = F$ avec la *donnée u nulle* pour le cas de la surface privilégiée.

Ici $(Z - z_0)$ ne tend pas vers *zéro* quand (x_0, y_0, z_0) vient sur le cône de sommet Ω.

D'après le théorème de la moyenne il suffit d'examiner l'intégrale

$$\iiint_{(\text{vol. } Abc)} \frac{\partial V}{\partial z_0} dz$$

ou

$$J = \iint_{\text{aire } bc)} V d\sigma.$$

L'on a vu que

$$\text{aire } bc = K . z_0 . \lambda,$$

si l'on a posé

$$\lambda = \sqrt{z_0^2 - x_0^2 - y_0^2}.$$

Isolons la verticale de A par un cylindre de rayon ε. Dans la portion

restante de l'aire (bc), l'on a, si $|z_0| < H$,

$$V < \log\left(\frac{H}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{H^2}{\varepsilon^2} - 1}\right),$$

$$J < \log\left(\frac{H}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{H^2}{\varepsilon^2} - 1}\right).H.K.$$

Conclusion. — L'on voit que J tend vers *zéro,* c'est-à-dire que $u(x_0, y_0, z_0)$ tend vers *zéro,* valeur donnée, lorsque A vient sur le cône : il suffit de faire décroître convenablement λ lorsque l'on fait décroître ε; par exemple, l'on peut prendre $\lambda = \varepsilon$.

DEUXIÈME PARTIE.

PROBLÈME EXTÉRIEUR.

CHAPITRE I.

1. Les conclusions de la première Partie montrent clairement que le problème intérieur n'est résoluble que pour certaines formes de la surface des données. Imaginons, par exemple, que cette surface soit une sphère.

Menons par le centre un cône à 45°. Dans la région intérieure au cône, inférieure ou supérieure, l'on se trouve dans les conditions exigées par le problème intérieur; il n'en va plus de même pour les points intérieurs à la sphère et extérieurs au cône.

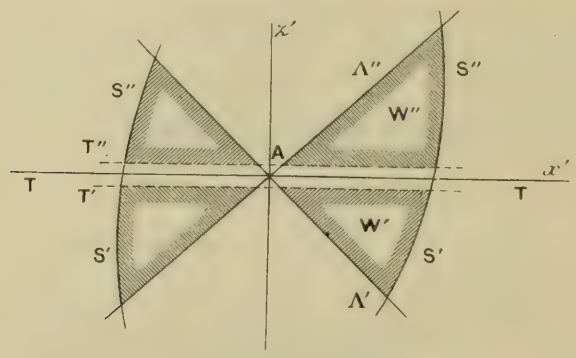
Nous devons donc étudier *l'intégration de* $A(u) = F(x, y, z)$, *lorsque la surface qui porte les données est analogue, au point de vue de l'*Analysis situs, *à un cylindre à axe vertical et est découpée* extérieurement *par le cône à* 45° *et à axe vertical.*

D'où cette désignation de « Problème extérieur ».

2. *Principe de la méthode d'intégration.* — L'idée de M. Volterra ne consiste plus, comme pour le problème intérieur, à trouver une sorte de fonction de Green et à faire une inversion d'intégrale, mais bien à revenir à une sorte de problème de Dirichlet dans le plan horizontal T passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$.

Pour cela, l'on appliquera la formule (G) au volume limité par S et par le cône A (extérieurement) avec une fonction auxiliaire V discontinue au passage par le plan T, c'est-à-dire l'on appliquera deux fois la formule (G) : 1° au volume W″ limité par le plan T″ de cote $(z_0 + \varepsilon)$; 2° au volume W′ limité par le plan T′ de cote $(z_0 - \varepsilon)$.

Fig. 11.



Comme nous aurons à faire plusieurs dérivations d'intégrales (dérivations que M. Volterra semble faire *intuitivement*), je vais donner, de suite, la théorie rigoureuse de ces dérivations.

3. *Adaptations diverses de la formule d'Ostrogradski.* — I. Nous aurons d'abord à dériver, par rapport à z_0, une intégrale de surface étendue à l'aire du plan T limitée par S

$$I = \iint_{(\text{aire } T, S)} \varphi \, dx \, dy = \iint_{(T, S)} \varphi \, r \, dr \, d\alpha.$$

Soient donc C la courbe d'intersection de S avec le plan T : $z = z_0$, et C_1 la courbe d'intersection de S avec le plan : $z = z_0 + \Delta z_0$.

Soit C′ la projection de C_1, nous allons prendre un contour C″ voisin de C et à une distance BD infiniment petite par rapport à DD′ et

nous aurons à établir une correspondance sur un rayon vecteur fixe, entre les points de $\overline{BD'}$ et les points de $\overline{BD}$.

Pour cela, nous donnerons à r la variation ρ (Ire Partie, Chap. I, n° 2)

$$\begin{cases} \rho \equiv 0, & \text{en B}, \\ \rho = DD' = \Delta z_0 . \cot(N, z), & \text{en D}; \end{cases}$$

ce qui donne, pour x :

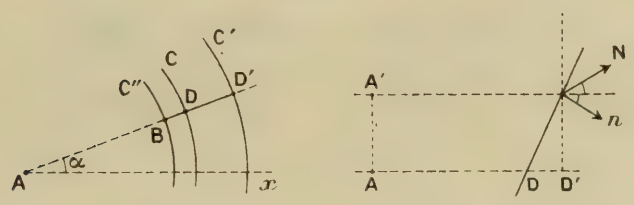
$$\xi = \rho \cos\alpha;$$

pour y :

$$\eta = \rho \sin\alpha;$$

$$\Delta I = \iint_{(\text{aire } C)} \Delta\varphi . dx\, dy + \iint_{(\text{aire } C - C'')} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\eta) \right\} dx\, dy.$$

Fig. 12.



La seconde intégrale se réduit à

$$\int_C \varphi . \Delta z_0 . \cot(N, z) . (dy \cos\alpha - dx \sin\alpha)$$
$$= \Delta z_0 \int_C \varphi . \cot(N, z)\, dl,$$

l étant l'élément de longueur de C.

Finalement,

$$\frac{\partial I}{\partial z_0} = \iint_{\text{aire } C} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} dx\, dy + \int_C \varphi \cot(N, z)\, dl.$$

4. II. Nous avons ensuite à dériver, par rapport à z_0, une intégrale *de surface* étendue, par exemple, à la surface BC découpée extérieurement dans S par le cône A.

Soit $\overline{AA'} = \Delta z_0$. L'aire découpée BC devient B'C'.

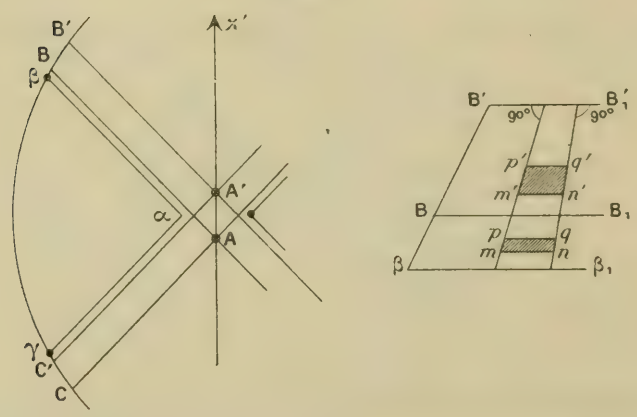
Par une surface de révolution $\alpha\beta\gamma$ située à une distance d'ordre supérieur à 1 en Δz_0 des deux nappes coniques, nous isolons une surface $\beta\gamma$ dont tous les points se correspondent à eux-mêmes. Puis, il faut faire correspondre les points de $B'\beta$ à ceux de $B\beta$ et ceux de $C'\gamma$ à ceux de $C\gamma$.

Soient $mn = dl$, $mp = d\lambda$, $(mnpq) = dl\,d\lambda$ et $d\lambda = K.dz$.

Pour $(m'n'p'q')$, dl est le même et λ éprouve une variation ρ :

$$\rho = 0 \quad \text{en } \beta, \qquad \rho = K\Delta z_0 \quad \text{en B};$$

Fig. 13.



ce qui donne, pour la deuxième intégrale et pour la partie supérieure BB_1,

$$\int_{(BB_1)} dl \int_\beta^B \frac{\partial}{\partial\lambda}(\varphi\rho)\,d\lambda = \int_{(BB_1)} \varphi\,dl.K\Delta z_0.$$

Or

$$K = \frac{1}{\sin(N, z)},$$

d'où

$$\Delta z_0 \int_{(BB_1)} \varphi \frac{1}{\sin(N, z)}\,dl.$$

Pour la courbe CC_1, l'on trouve, de la même manière,

$$-\Delta z_0 \int_{(CC_1)} \varphi \frac{1}{\sin(N, z)}\,dl,$$

en tout :

$$\Delta I = \Delta z_0 \left[\iint\limits_{(\text{aire } BB_1 CC_1)} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\omega + \int_{(BB_1)} \frac{\varphi}{\sin(N, z)} dl - \int_{(CC_1)} \frac{\varphi}{\sin(N, z)} dl \right],$$

et la partie entre crochets donne donc

$$\frac{\partial I}{\partial z_0}.$$

5. III. Pour la même translation de CAB en C′A′B′ nous aurons à dériver une intégrale *de volume*.

Toujours de même l'on trouve

$$\Delta I = \Delta z_0 \left[\iint\limits_{(\text{surf. } AB)} \varphi \, dx \, dy - \iint\limits_{(\text{surf. } AC)} \varphi \, dx \, dy + \iiint\limits_{(\text{vol. } ABC)} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\tau \right].$$

Cela fait, nous pouvons intégrer, d'après M. Volterra.

6. *Intégration.* — Cherchons une solution V″ de l'équation

$$A(V) = 0$$

qui soit nulle sur le cône supérieur A″ et de la forme

$$f(\theta) + [\log r] g(\theta),$$

où l'on a posé

$$\theta = \frac{z - z_0}{r} < 1.$$

L'on trouve

$$V'' = c + \int_0^\theta \log(1 - \theta^2) \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} + \log r (\arcsin \theta + c'),$$

il faut prendre

$$c = - \int_0^1 \log(1 - \theta^2) \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} = - q, \qquad c' = - \frac{\pi}{2}.$$

[Nous trouverons (IIe Partie, Chap. II, n° 3) la valeur numérique q qui n'est pas utile en ce moment.]

La formule (G) donne alors, puisque l'on a $A(u) = F$,

$$-\iiint_{(W'')} V''F\,d\tau = \iint_{(S'')}\left(u\frac{dV''}{dN} - V''\frac{du}{dN}\right)d\omega + \iint_{(T)}\left(u\frac{\partial V''}{\partial z} - V''\frac{\partial u}{\partial z}\right)d\omega.$$

De même, soit V' nulle sur A',

$$V' = +q + \int_0^\theta \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + [\log r]\left(\arcsin\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

l'on a

$$-\iiint_{(W')} V'F\,d\tau = \iint_{(S')}\left(u\frac{dV'}{dN} - V'\frac{du}{dN}\right)d\omega + \iint_{(T)}\left(V'\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial V'}{\partial z}\right)d\omega.$$

Ajoutons les membres de ces deux égalités :

$$-\int_{(W'')} - \int_{(W')} - \int_{(S'')} - \int_{(S')} = \iint_{(T)}(V' - V'')_T\frac{\partial u}{\partial z}\,d\omega = 2\iint_{(T)}\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial u}{\partial z}\,d\omega.$$

Cette dernière intégrale est donc connue en fonction de z_0 et des données.

Nous avons donc

$$\iint_{(T)}\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial u}{\partial z}\,d\omega = J_1.$$

Il suffit de dériver par rapport à $z = z_0$ pour arriver au but.

D'après le n° **3**, l'on a

$$\frac{\partial J_1}{\partial z_0} = \iint_{(T)}\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,d\omega + \int_{(C)}\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\cot(N, z)\frac{\partial u}{\partial z}\,dl,$$

u et ses dérivées étant donnés sur S, l'intégrale de surface est connue :

$$\iint_{(T)} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,d\omega = J_2.$$

Or

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + F,$$

d'où

$$\iint_{(T)} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\Delta u\,d\omega = J_2 + \iint_{(T)} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) F\,d\omega = J_3.$$

Mais ν étant *la normale extérieure à la courbe plane* C, l'on a (problème de Dirichlet)

$$\iint_{(T)} \Delta u\,d\omega - \int_C \frac{du}{d\nu}\,dl = 0,$$

$$\iint_{(T)} \log r\,\Delta u\,d\omega + \int_C \left[u\frac{d}{d\nu}(\log r) - \log r\frac{du}{d\nu}\right]dl = 2\pi u(x_0, y_0, z_0).$$

Ceci donne :

$$J_3 = q\int_C \frac{du}{d\nu}\,dl + \frac{\pi}{2}\left[2\pi u(x_0, y_0, z_0) - \int_C \left(u\frac{d}{d\nu}\log r - \log r\frac{du}{d\nu}\right)dl\right],$$

d'où

$$\pi^2 u(x_0, y_0, z_0) = J_3 - q\int_C \frac{du}{d\nu}\,dl + \frac{\pi}{2}\int_C \left(u\frac{d}{d\nu}\log r - \log r\frac{du}{d\nu}\right)dl = J_4,$$

J_4 est *connu,* donc u aussi, si l'on donne, sur S, les valeurs de u et de *toutes* ses dérivées.

L'intégration est achevée, en principe, mais nous devons tout exprimer plus explicitement pour montrer que $\frac{du}{dN}$ intervient seul.

7. Calculons donc $\frac{\partial J_1}{\partial z_0}$.

Or

$$-\frac{J_1}{2} = \int_{W''} + \int_{W'} + \int_{S''} + \int_S.$$

Pour alléger l'exposition, supposons $u = 0$ sur S, ce que l'on peut toujours obtenir par une différence d'intégrales.

1° *Expression de* $\frac{\partial}{\partial z_0}\int_{W''}\cdot$ — D'après le n° 3, c'est

$$\iiint_{W''} F\frac{\partial V''}{\partial z_0}\,d\tau - \iint_{(T)} V''_T F\,d\omega = \iiint_{W''} + \iint_{(T)}\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)F\,d\omega.$$

2° *Expression de* $\frac{\partial}{\partial z_0}\int_{W'}\cdot$ — C'est le même résultat, car il y a double changement de signe pour l'intégrale de surface.

3° *Expression de* $\frac{\partial}{\partial z_0}\iint_{S''} - V''\frac{du}{dN}\,d\omega$. — D'après le n° 4 c'est

$$\iint_{S''} - \frac{\partial V''}{\partial z_0}\frac{du}{dN}\,d\omega - \int_C - V''\frac{du}{dN}\frac{1}{\sin(N, z)}\,dl.$$

4° *Expression de* $\frac{\partial}{\partial z_0}\int_{S'}\cdot$ — De même on obtient

$$\iint_{S'} - \frac{\partial V'}{\partial z_0}\frac{du}{dN}\,d\omega + \int_C - V'\frac{du}{dN}\frac{1}{\sin(N, z)}\,dl.$$

Finalement

$$\begin{aligned} -2\frac{\partial J_1}{\partial z_0} = &\int_{(W''+W')} F\frac{\partial V''}{\partial z_0}\,d\tau - \int_{(S''+S')}\frac{du}{dN}\frac{\partial V''}{\partial z_0}\,d\omega \\ &+ 2\int_T\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)F\,d\omega \\ &- 2\int_C\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{du}{dN}\frac{1}{\sin(N, z)}\,dl; \end{aligned}$$

alors, posant $W = W' + W''$ et $S = S' + S''$,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{\partial J_1}{\partial z_0} - \int_C\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\cot(N, z)\frac{\partial u}{\partial z}\,dl \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\int_{(W)} F\frac{\partial V}{\partial z_0}\,d\tau - \int_{(S)}\frac{du}{dN}\frac{\partial V}{\partial z_0}\,d\omega\right\} - \int_T\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)F\,d\omega \\ &\quad + \int_C\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\left[\frac{1}{\sin(N, z)}\frac{du}{dN} - \frac{\cos(N, z)}{\sin(N, z)}\frac{\partial u}{\partial z}\right]dl. \end{aligned}$$

Le crochet se réduit, dans l'intégrale curviligne, à [1]

$$\frac{du}{d\nu},$$

enfin, donc

$$J_3 = -\frac{1}{2}\left\{\int_W F\frac{\partial V}{\partial z_0}d\tau - \int_S \frac{du}{dN}\frac{\partial V}{\partial z_0}d\omega\right\} + \int_C \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{du}{d\nu}dl,$$

$$J_4 = -\frac{1}{2}\left\{\int_W - \int_S\right\},$$

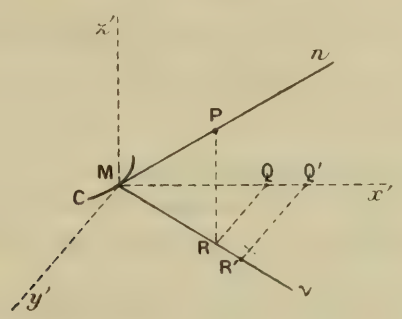
---

[1] Soit M un point de la courbe C, Mν la normale à C, Mn la normale à la surface S. Soit $\overline{MP} = 1$, on a

$$\alpha = \overline{MQ}, \qquad \beta = \overline{QR}, \qquad \gamma = \overline{RP}$$

(α, β, γ sont les cosinus de Mn).

Fig. 13 *bis*.



Soient a, b les cosinus de Mν, on a

$$a = \overline{MQ'}, \qquad b = \overline{Q'R'} \qquad (\overline{MR'} = 1),$$

d'où

$$a = \frac{\alpha}{\sin(n, z)} = \frac{\alpha}{\sin(N, z)}, \qquad b = \frac{\beta}{\sin(N, z)}.$$

Or $\cos(N, z) = -\gamma$, d'où

$$\frac{1}{\sin(N, z)}\left[\frac{du}{dN} - \cos(N, z)\frac{\partial u}{\partial z}\right] = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{d\nu}.$$

c'est-à-dire

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{2\pi^2}\left\{\int_W - \int_S\right\}$$

$$= +\frac{1}{2\pi^2}\iiint_{(W)} \frac{1}{\sqrt{r^2-(z-z_0)^2}} \log\left[\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}\right] F\, d\tau$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\iint_{(S)} \frac{1}{\sqrt{r^2-(z-z_0)^2}} \log\left[\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}\right] \frac{du}{dN}\, d\omega.$$

C'est la formule donnée par M. Volterra (p. 193), sauf que, si nous n'avions pas choisi la donnée *u nulle* sur S, nous aurions, en plus, un terme

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\iint_{(S)} u f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)\, d\omega\right\},$$

que l'on ne peut mettre sous une forme simple parce qu'il se présenterait des intégrales curvilignes dont l'élément différentiel est *infini*.

8. Conclusion. — *Cette intégration exige donc la donnée de u et* $\frac{du}{dN}$ *et l'unicité de la section extérieure de* S *par* Λ.

Il est encore des surfaces *privilégiées*.

Mais *l'intégrale prend-elle la valeur donnée à la frontière? Ceci entraîne des conditions de possibilité* et M. Volterra a montré la présence *d'autres conditions encore*.

L'intégration précédente appelle donc quelques remarques fondamentales.

Jusqu'ici elle n'est que *formelle :*

Si l'intégrale existe, elle est *représentée* par la formule obtenue, mais *la formule peut ne pas représenter une véritable intégrale* du problème extérieur.

CHAPITRE II.

CONDITIONS D'EXISTENCE DE L'INTÉGRALE DANS LE PROBLÈME EXTÉRIEUR. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER.

Soit donc $A(u) = F(x, y, z)$ avec des données extérieures.

En prenant des différences d'intégrales, nous pouvons supposer

$$u = 0 \text{ sur } S,$$
$$F = 0.$$

1. *La condition de M. Volterra.* — Pour obtenir l'intégrale, M. Volterra emploie une fonction V qui se réduit à

$$K + K' \log r$$

dans le plan horizontal T.

Dans l'aire découpée par ce plan dans le volume W il a alors à appliquer *la formule ordinaire de Green.*

De même, soit une fonction V, *nulle* sur le cône, se réduisant à

$$K = \text{const.}$$

dans le plan T.

L'application à la même aire de la formule ordinaire de Green donnera *zéro* d'un côté et une fonction des données de l'autre, d'où une *condition imposée aux données.*

La fonction V, intégrale de $A(V) = 0$, sera, dans W″,

$$V'' = \arcsin \frac{z - z_0}{r} - \frac{\pi}{2},$$

dans W′

$$V' = \arcsin \frac{z - z_0}{r} + \frac{\pi}{2},$$

et alors *la même marche exactement* que celle suivie pour intégrer donne

$$0 = \iint_{(S)} \frac{1}{\sqrt{r^2 - (z - z_0)^2}} \frac{du}{dN} d\omega - \iiint_{(W)} \frac{F}{\sqrt{r^2 - (z - z_0)^2}} d\tau$$

(Mémoire de M. Volterra, p. 188).

Cette condition de M. Volterra, *qu'il ne commente aucunement*, se simplifie si nous prenons $F \equiv 0$ et devient

$$(C_1) \qquad 0 = \iint_{(S)} \frac{1}{\sqrt{r^2 - (z - z_0)^2}} \frac{du}{dN} d\omega.$$

Je l'appellerai une *condition mobile* puisquelle doit être réalisée pour toute aire (S) découpée par un cône Λ ayant son sommet en un point quelconque du volume W, en particulier pour toute aire (S_0) relative à un cône Λ ayant son sommet en un point $\mathcal{A}$ de S.

2. *La condition de l'auteur.* — Au moment où j'abordai cette étude, je proposai [1] une autre manière de trouver une condition mobile. Toute intégrale de $A(u) = 0$, soit $\psi(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ *nulle* sur le cône Λ et *exempte* de *singularités* à l'extérieur de ce cône donne, par l'application de la formule fondamentale de l'Introduction, une condition.

Mais j'ai été amené à reconnaître que la fonction ψ, que j'ai donnée, avait une dérivée *discontinue*, en sorte qu'elle n'est pas utilisable, et, à défaut de recherches plus profondes sur une équation de Laplace, je me borne à signaler cette idée : on pressent que ψ peut exister et qu'une condition peut donc exister [2].

Mais il y a encore autre chose, dont M. Volterra ne s'est point préoccupé.

Il faut que l'intégrale prenne la valeur donnée à la frontière, et ceci me donne, dans les conditions où je me suis placé, et où il faut se placer pour pouvoir faire une discussion, (S_0) étant l'aire relative à un point frontière $\mathcal{A}$,

$$(C_2) \qquad 0 = \iint_{(S_0)} \frac{1}{\sqrt{r^2 - (z - z_0)^2}} \log\left[\frac{r^2 - (z - z_0)^2}{r}\right] \frac{du}{dN} d\omega,$$

---

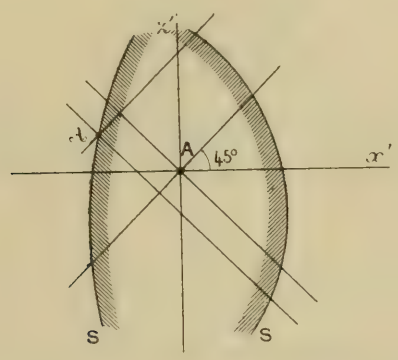
(1) *Comptes rendus*, 11 février 1901.

(2) L'existence effective de ψ paraît résulter d'une remarque énoncée dans la *Thèse* de M. Le Roux.

c'est encore une *condition mobile*, mais relative seulement aux points $\mathcal{A}$, et non, comme la précédente, aux points A et $\mathcal{A}$.

Avant d'aborder la comparaison des deux conditions, je vais mon-

Fig. 14.



trer, sur un exemple simple, qu'elles peuvent parfois être *compatibles*.

3. *Sur un cas particulier du problème extérieur.* — Supposons les données portées par un *cylindre* à axe vertical et *invariables* pour une même génératrice. Soit α l'angle polaire qui caractérise une génératrice, l'on donne :

$$u = 0$$

sur le cylindre,

$$\frac{du}{dN} = f(\alpha) = \text{dérivée } \textit{normale} \text{ extérieure.}$$

Il est clair alors qu'il suffit d'examiner les conditions C_1 et C_2 dans une section droite.

La condition (C_1) donne

$$\iint \frac{1}{\sqrt{r^2 - (z - z_0)^2}} f(\alpha) R \, d\alpha \, d(z - z_0) = 0;$$

r étant le rayon vecteur, par rapport à A, d'un point de la circonférence de la section droite, l'on voit que, pour une même génératrice, $\frac{z - z_0}{r} = u$ varie de -1 à $+1$.

Donc (C_1) devient

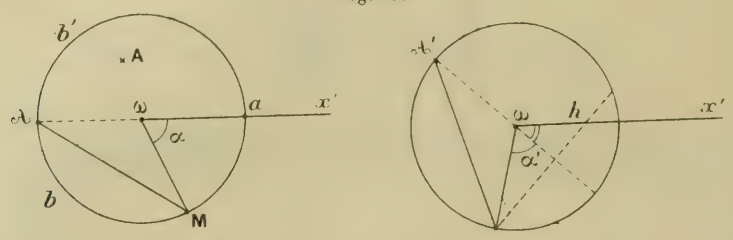
$$\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 0$$

ou

$$(\mathfrak{F}) \qquad \int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha = 0,$$

ceci quel que soit le point A dans l'aire de la section droite. Donc ici la *condition mobile* (C_1) se résout en *la seule condition fonctionnelle* qui précède [1].

Fig. 15.



Envisageons la condition (C_2) et supposons d'abord $\mathcal{A}$ dans le prolongement de $\omega x'$ (*fig.* 15), alors on a

$$r = \mathcal{A}M = 2R\cos\frac{\alpha}{2},$$

et M doit parcourir successivement les demi-circonférences $ab\mathcal{A}$, $ab'\mathcal{A}$.

D'ailleurs

$$\log\left[\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}\right] = \log 2R + \log\cos\frac{\alpha}{2} + \log(1-u^2).$$

Donc $C_2(\mathcal{A})$ donne :

$$\int\int\left[\log 2R + \log\cos\frac{\alpha}{2} + \log(1-u^2)\right]\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\,R\,f(\alpha)\,d\alpha = 0.$$

---

[1] Et qui a une signification physique : u étant un *potentiel des vitesses*, elle exprimerait que le *flux total* à travers la circonférence est *nul*.

Il y a trois termes; le premier et le troisième nous donnent l'équation ($\mathcal{F}$).

[L'on a d'ailleurs, en faisant

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = dv,$$

$$\int_0^1 \log(1-u^2)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos v)\,dv = 2\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2} \qquad \text{(Euler)},$$

et

$$\int_{-1}^{+1} = 2\int_0^1 = 2\pi\log\frac{1}{2}\cdot$$

mais cette valeur numérique est sans importance.]

Le second terme, au contraire, donne du nouveau, savoir :

$$\int_0^\pi f(\alpha)\log\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha + \int_0^\pi f(2\pi-\alpha)\log\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha = 0$$

ou

$$\int_0^\pi [f(\alpha)+f(2\pi-\alpha)]\log\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha = 0.$$

Supposons maintenant que le point $\mathcal{A}$ ait une position quelconque $\mathcal{A}'$, caractérisée par l'angle h (*fig.* 99), la condition devient, quel que soit h entre 0 et 2π,

$$\int_0^\pi [f(\alpha'+h)+f(2\pi-\alpha'+h)]\log\cos\frac{\alpha'}{2}\,d\alpha' = 0.$$

En un mot, la condition mobile C_2 se réduit à ceci : *l'intégrale*

$$(\mathcal{G}) \qquad \mathfrak{z} = \int_0^\pi [f(x+y)+f(2\pi-x+y)]\log\cos\frac{x}{2}\,dx$$

doit être nulle quel que soit y entre 0 *et* 2π.

4. Je vais montrer, par l'intuition géométrique, que ceci est possible.

Soit, d'une manière plus générale,

$$z = \int_a^b \varphi(x, y)\, dx.$$

L'on veut que z soit *nul quel que soit* y.

Soit $\Phi(x, y)$ une fonction telle que

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

On s'imposera en plus que la surface

$$\zeta = \Phi(x, y),$$

contienne deux droites parallèles à Oy de même cote, d'ailleurs quelconque, dans les plans

$$x = a, \qquad x = b;$$

z sera bien nul, quel que soit y.

Il faut, bien entendu, que Φ renferme y, c'est-à-dire que la surface ne soit pas un cylindre. Φ renferme un très grand arbitraire, donc φ aussi, et il reste à résoudre l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) + f(2\pi - x + y) = \frac{\varphi(x, y)}{\log \cos \frac{x}{2}}.$$

f contient une part d'arbitraire comme φ et l'on imposera, en plus, à f la condition :

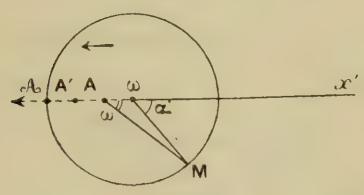
$$\int_0^{2\pi} f(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

L'on voit, sur ce cas simple, que les conditions de M. Volterra et de l'auteur peuvent bien être remplies en même temps, et même ici la condition (C_2) contient la condition (C_1).

5. *Sur un cas particulier* (suite). *Étude de la dérivée conormale.* — Nous allons étudier la dérivée conormale dans le cas du cylindre portant des données constantes sur une même génératrice. Pour simplifier, prenons seulement un point particulier, le point $\mathcal{A}$ sur $\omega x'$. En ce point l'on a

$$\frac{d}{dN} = -\frac{\partial}{\partial x_0}.$$

Fig. 16.



Le point $\mathcal{A}$ peut être regardé comme la limite vers laquelle tend un point A.

Étudions la dérivée de l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int\int\frac{1}{\sqrt{r^2-(z-z_0)^2}}\log\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}\frac{du}{dN}d\omega$$

pour un déplacement $\overline{AA'}$.

L'on trouve, comme toujours, d'abord la même intégrale avec, *sous le signe, la fonction dérivée*, puis deux intégrales curvilignes. Ces deux dernières *se détruisent* lorsque la donnée est la même sur une même génératrice; cela est facile à reconnaître et je n'y insisterai pas.

Il reste donc

$$+\frac{R}{2\pi^2}\int\int\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}d\alpha\,dz'.$$

L'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x_0} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right].$$

Pour évaluer $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\right)_{\mathcal{A}}$ et $\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)_{\mathcal{A}}$ nous prendrons les *limites* respec-

tives de

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\right)_A \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)_A.$$

L'équation de la circonférence en α et $r = \overline{AM}$ s'obtient ainsi :

$$r\cos\omega = x_0 + R\cos\alpha,$$

$$r\sin\omega = R\sin\alpha,$$

d'où

$$r^2 = x_0^2 + R^2 + 2x_0 R\cos\alpha,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)_A = -\frac{x_0 R\sin\alpha}{r},$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)_{\mathcal{A}} = -\frac{R^2\sin\alpha}{2R\cos\frac{\alpha}{2}} = -R\sin\frac{\alpha}{2};$$

de même

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\right)_A = \frac{x_0 + R\cos\alpha}{x_0 R\sin\alpha},$$

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\right)_{\mathcal{A}} = \frac{R(1+\cos\alpha)}{R^2\sin\alpha} = \frac{1}{R}\cot\frac{\alpha}{2};$$

alors on a

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)_{\mathcal{A}} = \frac{1}{R}\cot\frac{\alpha}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2-(z-z_0)^2}}\log\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}f'(\alpha)\right.$$
$$-R\sin\frac{\alpha}{2}f(\alpha)\left[\frac{2}{r^2(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r^2(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{r^2(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}\right]\right\}$$

$\left(\text{l'on pose toujours } \frac{z-z_0}{r} = u\right)$.

Ainsi

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_{\mathcal{A}} = \frac{R}{2\pi^2}\int\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)_{\mathcal{A}} d\alpha\, dz',$$

d'où les 4 intégrales, à $\frac{1}{2\pi^2}$ près,

$$I_1 = \int\int \cot\frac{\alpha}{2} f'(\alpha)[\log r + \log(1-u^2)]\, d\alpha \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$I_2 = \int\int \cos\frac{\alpha}{2} f(\alpha) \frac{1}{2R\cos\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha \frac{du}{(\sqrt{1-u^2})^3},$$

$$I_3 = \int\int \cos\frac{\alpha}{2} f(\alpha) \frac{1}{2R\cos\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$I_4 = \int\int \frac{1}{2R} f(\alpha)[\log r + \log(1-u^2)]\, d\alpha \frac{du}{(\sqrt{1-u^2})^3}.$$

Mais, u variant de -1 à $+1$, les intégrales en u, dans I_2 et I_4, n'*ont pas de sens*.

La présence des conditions ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{G}$) *les élimine*, fort heureusement.

Les conditions étaient donc bien nécessaires pour la convergence de la dérivée conormale. Comme, d'ailleurs, I_3 est *nul* en vertu aussi des conditions, il resterait à étudier la première intégrale et à montrer que l'on a bien

$$\frac{1}{2\pi^2} I_1 = f(\pi).$$

Or

$$\log r = \log 2R + \log\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi; \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{\log(1-u^2)\, du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\pi\log\frac{1}{2}.$$

On devrait avoir

$$(\mathcal{H}) \quad \left\{ \begin{aligned} f(\pi) = {} & \frac{\log 2R}{2\pi}\int_0^\pi [f'(\alpha) - f'(2\pi-\alpha)]\cot\frac{\alpha}{2}\, d\alpha \\ & + \frac{\log\frac{1}{2}}{\pi}\int_0^\pi [f'(\alpha) - f'(2\pi-\alpha)]\cot\frac{\alpha}{2}\log\cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha. \end{aligned} \right.$$

6. Conclusion. — En général, l'on peut dire que *les deux conditions,* celle de M. Volterra, celle de l'auteur, peuvent ou non être compatibles.

Peut-être, même, la convergence de la dérivée conormale à la frontière conduit-elle à *une nouvelle condition mobile* qui serait ($\mathfrak{H}$) pour le point particulier choisi et, pour embrasser tous les points frontière, plus complexe encore.

Le Problème extérieur appellerait donc des recherches excessivement difficiles.

TROISIÈME PARTIE.

EXTENSIONS DIVERSES.

CHAPITRE I.

EXTENSION DU PROBLÈME EXTÉRIEUR. — INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$B(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x, y, z, t).$$

1. Si l'on passe de l'équation à trois variables $A(u)$ à l'équation analogue à quatre variables $B(u)$, la belle méthode de M. Volterra pour le *problème intérieur* s'étend immédiatement, sans aucune difficulté, comme l'a montré M. Orazio Tedone [1].

Mais, pour le *problème extérieur,* il se présente une particularité très remarquable.

Posons

$$\Delta^{p+1}(u) = \sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

[1] *Annali di Matematica,* série III, t. I, 1898. Milan.

Dans le Mémoire que nous venons de citer, M. Tedone montre que *la méthode* de M. Volterra *s'étend facilement* aux équations

$$\Delta^{2n,1}(u) = \mathrm{F} \text{ (problème extérieur)}.$$

Il n'est pas question des équations

$$\Delta^{2n+1,1}(u) = \mathrm{F} \text{ (problème extérieur)}.$$

Or nous avons exposé, dans la deuxième Partie, la méthode de M. Volterra pour le *problème extérieur* relatif à

$$\mathrm{A}(u) \quad \text{ou} \quad \Delta^{2,1}(u).$$

Ayant essayé de *généraliser banalement cette méthode* au cas

$$\mathrm{B}(u) \quad \text{ou} \quad \Delta^{3,1}(u),$$

nous avons reconnu une *impossibilité absolue*.

Il est inutile de transcrire ici les calculs : l'on ne peut aboutir.

M. Coulon m'a dit l'avoir reconnu de son côté.

Par une voie très sensiblement différente l'on arrive, au contraire, à *intégrer* l'équation [1]

$$\mathrm{B}(u) = \mathrm{F}(x, y, z, t) \text{ (problème extérieur)}.$$

Il faudra prendre des fonctions auxiliaires V *autres* que celles de M. Volterra, les combiner d'une manière *différente*, enfin effectuer *deux* dérivations au lieu d'*une*.

2. Afin de faciliter l'intuition des choses nous parlerons le langage géométrique dans l'espace à *quatre dimensions :*

α, β, γ, θ seront les *cosinus* d'une *normale extérieure ;* nous écrirons

$$d\tau = dx.dy.dz.dt,$$

$$\theta.d\omega = dx.dy.dz;$$

---

[1] J'ai annoncé ce résultat à l'Académie des Sciences le 15 décembre 1902.

enfin quand nous écrirons dl, par analogie avec le cas de l'espace ordinaire, ce dl représentera un *élément* de variété à *deux dimensions* (¹).

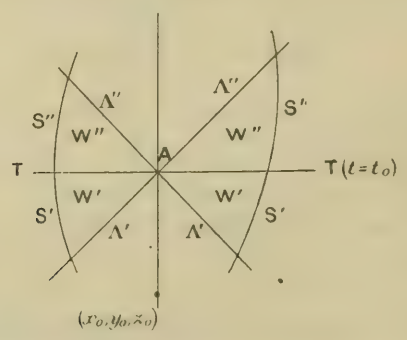
Il est bien évident que la *formule fondamentale* (G) dans l'Introduction s'étend immédiatement.

Nous appellerons encore T le *plan horizontal* de A, $t = t_0$, et Λ le *cône* de A, $r = t - t_0$,

$$[r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2].$$

Nous affecterons de deux accents les éléments *supérieurs* à T, d'un seul les éléments *inférieurs*.

Fig. 17.



Les *fonctions auxiliaires*, solutions de $B(V) = 0$ et *nulles* sur Λ'' et Λ', seront

$$V'' = \frac{r - (t - t_0)}{r},$$

$$V' = \frac{r + (t - t_0)}{r}.$$

Dans le plan T on a

$$(1) \qquad (V'')_T = (V')_T = +1.$$

(¹) *Voir* le calcul élégant de $d\Sigma_p$ d'une variété à p dimensions dans un espace à n dimensions dans le Mémoire de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XXII).

Enfin l'on a constamment

$$(2)\qquad \frac{\partial V''}{\partial t} = \frac{-1}{r} = -\frac{\partial V'}{\partial t}.$$

3. *Intégration.* — Appliquons à W'' et à W' la formule (G) et ajoutons membre à membre, il vient

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{W''} V''F\,d\tau + \int_{W'} V'F\,d\tau + \int_{S''}\left(u\frac{dV''}{dN} - V''\frac{du}{dN}\right)d\omega \\ &\qquad + \int_{S'}\left(u\frac{dV'}{dN} - V'\frac{du}{dN}\right)d\omega \\ &\quad = 2\int_{T}\frac{1}{r}\,u\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

C'est cette équation (1) qui, dérivée deux fois en t_0, donnera $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et, par suite,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

et l'on appliquera alors la *formule classique de Green.*

Les dérivations se font conformément aux formules démontrées dans la deuxième Partie. L'on a

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial t_0}\left[\int_{W''} + \int_{W'}\right] = \int_{W''}\frac{1}{r}F\,d\tau - \int_{W'}\frac{1}{r}F\,d\tau,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_0}\left[\int_{S''} - V''\frac{du}{dN}\,d\omega + \int_{S'} - V'\frac{du}{dN}\,d\omega\right] \\ &\quad = -\int_{S''}\frac{1}{r}\frac{du}{dN}\,d\omega + \int_{S'}\frac{1}{r}\frac{du}{dN}\,d\omega \end{aligned}\right.$$

(certains termes se *détruisent*. D'autres sont *nuls* car V'' s'annule sur A'' et V' s'annule sur A').

Nous appelons encore C'' la variété à *deux* dimensions, intersection de A'' par S, C' l'intersection de A' par S, enfin C l'intersection de S et T.

L'on a encore

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_0}\left[\int_{S''} u\frac{dV''}{dN}d\omega + \int_{S'} u\frac{dV'}{dN}d\omega\right] \\ &\quad = \int_{S''} u\frac{-\cos(n,r)}{r^2}d\omega + \int_{S'} u\frac{\cos(n,r)}{r^2}d\omega \\ &\qquad + \int_{C''+C'} u\frac{(t-t_0)\cos(n,r)+r\cos(n,t)}{r^2}\frac{dl}{\sin(N,t)} \\ &\qquad - 2\int_C u\frac{1}{r}\cos(n,t)\frac{dl}{\sin(N,t)} \end{aligned}\right.$$

(car cela résulte de

$$\frac{\partial V''}{\partial t} = -\frac{1}{r} = -\frac{\partial V'}{\partial t},$$

$$\frac{\partial V''}{\partial r} = +\frac{t-t_0}{r^2} = -\frac{\partial V'}{\partial r},$$

$$\frac{dV''}{dN} = -\frac{dV'}{dN} = \frac{(t-t_0)\cos(n,r)+r\cos(n,t)}{r^2},$$

n étant la normale extérieure, N la conormale).

D'autre part, la dérivée par rapport à t_0 du deuxième membre de (1) est

$$2\int_T \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}dx\,dy\,dz + 2\int_C \frac{1}{r}u\cot(N,t)\,dl.$$

De

$$\cos(n,t) = -\cos(N,t),$$

il résulte que l'intégrale relative à C, que l'on vient d'écrire, est égale à la dernière intégrale qui figure dans (4).

Il reste donc, *après une première dérivation*,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{W''}\frac{1}{r}F\,d\tau - \int_{W'}\frac{1}{r}F\,d\tau - \int_{S''}\frac{1}{r}\frac{du}{dN}d\omega \\ &\quad + \int_{S'}\frac{1}{r}\frac{du}{dN}d\omega - \int_{S''}u\frac{\cos(n,r)}{r^2}d\omega + \int_{S'}u\frac{\cos(n,r)}{r^2}d\omega \\ &\quad + \int_{C''+C'}u\frac{dV''}{dN}\frac{dl}{\sin(N,t)} = 2\int_T\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

Dérivons (I) comme nous avons dérivé (1); l'on a

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial t_0}\left(\int_{W''}-\int_{W'}\right)=\int_{\Lambda''+\Lambda'}\frac{1}{r}F\,dx\,dy\,dz-2\int_{T}\frac{1}{r}F\,dx\,dy\,dz.$$

Puis, pour les quatre intégrales de surface, l'on a

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t_0}\left(-\int_{S''}+\int_{S'}\right)\\&\quad=-\int_{C''+C'}\frac{1}{r}\frac{du}{dN}\frac{dl}{\sin(N,t)}+2\int_{C}\frac{1}{r}\frac{du}{dN}\frac{dl}{\sin(N,t)}\\&\qquad+2\int_{C}u\frac{\cos(n,r)}{r^2}\frac{dl}{\sin(N,t)}-\int_{C''+C'}u\frac{\cos(n,r)}{r^2}\frac{dl}{\sin(N,t)}\end{aligned}\right.$$

et il reste

$$+\frac{\partial}{\partial t_0}\int_{C''+C'}u\frac{dV''}{dN}\frac{dl}{\sin(N,t)}$$

et le second membre de (I) donne

$$2\int_{T}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx\,dy\,dz+2\int_{C}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\cot(N,t)\,dl.$$

Or, nous avons quelques groupements intéressants :

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+F=\Delta u,$$

$$(8)\qquad \frac{1}{\sin(N,t)}\left[\frac{du}{dN}-\cos(N,t)\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{du}{d\nu},$$

en appelant ν *la normale à* C *situé dans le plan* T (car C possède *une variété à deux dimensions de normales,* tout comme une courbe gauche dans l'espace ordinaire).

De même nous avons

$$(9)\qquad \frac{1}{\sin(N,t)}\frac{\cos(n,r)}{r^2}=-\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}.$$

Or, ces combinaisons (7), (8), (9) *se présentent naturellement* et

nous avons enfin

$$
(\mathrm{II})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{\Lambda} \frac{1}{r} \mathrm{F}\, dx\, dy\, dz - \int_{\mathrm{C}''+\mathrm{C}'} \frac{1}{r} \frac{du}{d\mathrm{N}} \frac{dl}{\sin(\mathrm{N}, t)} \\
&\quad - \int_{\mathrm{C}''+\mathrm{C}'} u \frac{\cos(n, r)}{r^2} \frac{dl}{\sin(\mathrm{N}, t)} + \frac{\partial}{\partial t_0} \left[\int_{\mathrm{C}''+\mathrm{C}'} u \frac{d\mathrm{V}''}{d\mathrm{N}} \frac{dl}{\sin(\mathrm{N}, t)} \right] \\
&\quad = 2 \int_{\mathrm{T}} \frac{1}{r} \Delta u\, dx\, dy\, dz - 2 \int_{\mathrm{C}} \left(\frac{1}{r} \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} \right) dl.
\end{aligned}
\right.
$$

Or, sur C, dl est l'élément de surface dans l'espace ordinaire.

Donc, le *second membre* de (II′), d'après *la formule de Green*, est

$$-8\pi u(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

L'intégration est effectuée.

4. *La valeur de* u au point $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0, t_0)$ *est obtenue en fonction des valeurs de* u et $\frac{du}{d\mathrm{N}}$ *sur les deux variétés* à deux dimensions C″ et C′ *sections de la surface* S qui est donnée *par le cône* Λ *relatif au point* A.

Ainsi la valeur de l'intégrale *n'est pas du tout la même fonction des données* dans le *problème extérieur* pour $\mathrm{A}(u)$ et dans le *problème extérieur* pour $\mathrm{B}(u)$. Il n'est pas surprenant, par conséquent, que nous ayons dû prendre une méthode d'intégration différente de celle de M. Volterra.

Remarque. — Par la même voie que M. Volterra, l'on trouve ici *la même condition* que dans le cas de trois variables.

Il existe encore d'*autres conditions* de possibilité du problème, comme je l'ai montré dans le cas de trois variables.

La conclusion est la même : il est extrêmement difficile de reconnaître si la solution obtenue est *une véritable solution*.

CHAPITRE II.

INTÉGRATION DE

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + hu + f$$

(PROBLÈME INTÉRIEUR), PAR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

1. Étant réalisées quelques hypothèses, très larges, relativement aux données, nous savons que l'intégrale de

$$(1) \qquad \mathrm{A}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \mathrm{F}(x, y, z)$$

existe et prend les valeurs données (ainsi que sa dérivée conormale) à la frontière.

Nous pouvons essayer, par suite, de passer de l'équation (1) à l'équation (E) par cette méthode d'approximations successives, qui a donné des résultats si importants à M. Picard [1] pour l'équation linéaire du deuxième ordre à deux variables.

Le principe est le suivant :

Écrivons (E) sous la forme

$$(\mathrm{E}) \qquad \mathrm{A}(u) = \Phi(u) + f(x, y, z)$$

(a, b, c, h, f sont fonctions de x, y, z *finies*).

On forme d'abord l'intégrale u_0 de

$$(\mathrm{E}_0) \qquad \mathrm{A}(u_0) = f(x, y, z),$$

u_0 et $\frac{du_0}{dN}$ prenant les valeurs données sur la surface des données S.

Connaissant u_0, on forme l'intégrale u_1 de

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \mathrm{A}(u_1) = \Phi(u_0),$$

u_1 et $\frac{du_1}{dN}$ étant *nuls* sur S.

---

[1] *Voir* Préface.

Puis on intègre

$$(E_2) \qquad A(u_2) = \Phi(u_1),$$

u_2 et $\frac{du_2}{dN}$ étant *nuls* sur S, et ainsi de suite.

Les équations (E_0), (E_1), ... sont toutes du type (1) et l'on a pour l'*intégrale cherchée*

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$

à condition que

$$\sum u_n, \quad \sum \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad \sum \frac{\partial u_n}{\partial y}, \quad \sum \frac{\partial u_n}{\partial z}$$

soient *convergentes*.

2. Étudions donc les séries considérées. Puisque $f(x, y, z)$ reste *fini* dans la région considérée de l'espace (enveloppe des cônes Λ touchant le bord de S), $u_0(x, y, z)$ et ses dérivées premières restent *finis*. On peut donc connaître, en fonction des données, un nombre $M > 0$ tel que, dans tout le champ, on ait

$$|\Phi_0| = \left| a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + c\frac{\partial u_0}{\partial z} + hu_0 \right| < M.$$

Appelons Z la cote du point *le plus élevé* de l'aire de S découpée par un cône quelconque Λ ayant pour sommet un point (x, y, z) du champ d'intégrabilité déterminé par la forme et l'étendue de S.

On a (Ire Partie, Chapitre I, n° **1**)

$$|u_1(x, y, z)| < M\frac{(Z - z)^2}{2},$$

$$|u'_1(x, y, z)| < M(Z - z)$$

(l'accent désigne l'une quelconque des trois dérivées partielles).

D'où

$$|\Phi(u_1)| < KM(Z - z)\left(\frac{Z - z}{2} + 3\right),$$

K étant supérieur au plus grand des modules des fonctions a, b, c, h, dans le champ.

Or, dans ce champ total, nous pouvons fixer encore un nombre H tel que

$$K\left(\frac{Z-z}{2}+3\right)<H,$$

ce qui donne

$$|\Phi(u_1)|<HM(Z-z).$$

Voici l'essentiel obtenu : le facteur $(Z-z)$ que l'on fera passer sous le signe de quadrature. Avec cela nous obtenons le mode de convergence de l^x; sans cela, nous avons le mode de convergence de la progression géométrique.

3. Reportons-nous, en effet, aux valeurs de

$$u_2(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z_0}.$$

On a (Ire Partie, Chapitre I, nos **4** et **5**), par l'emploi du plan majorant BC de cote Z,

$$\begin{aligned}
|2\pi u_2(x_0, y_0, z_0)| &< HM\left|\iiint_{(ABC)}(Z-z)\frac{\partial V_A}{\partial z_0}d\tau\right| \\
&< HM\,2\pi\int_{z_0}^{Z}(Z-z)\,dz\int_0^{z-z_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{(z-z_0)^2-r^2}} \\
&< HM\,2\pi\int_{z_0}^{Z}(Z-z)(z-z_0)\,dz \\
&< HM\,2\pi\frac{(Z-z_0)^3}{2.3},
\end{aligned}$$

enfin

$$|u_2(x_0, y_0, z_0)|<HM\frac{(Z-z_0)^3}{3!}.$$

Pour les dérivées premières u'_2, il se présente une intégrale

$$\int_{z_0}^{Z} f(x_0, y_0, z)\,dz,$$

qui donne

$$\mathrm{HM}\int_{z_0}^{Z}(Z-z)\,dz=\mathrm{HM}\frac{(Z-z_0)^2}{2},$$

$$u_2'(x_0,y_0,z_0)|<\mathrm{HM}\frac{(Z-z_0)^2}{2},$$

en sorte que nous pouvons former une limite supérieure de

$$|\Phi(u_2)|,$$

$$|\Phi[u_2(x,y,z)]|<\mathrm{HM}\frac{(Z-z)^2}{2}\mathrm{K}\left(3+\frac{Z-z}{3}\right)<\mathrm{H}^2\mathrm{M}\frac{(Z-z)^2}{2!}.$$

Et alors le même mécanisme donne

$$|u_3(x_0,y_0,z_0)|<\mathrm{H}^2\mathrm{M}\frac{(Z-z_0)^4}{4!},$$

$$u_3'(x_0,y_0,z_0)|<\mathrm{H}^2\mathrm{M}\frac{(Z-z_0)^3}{3!},$$

d'où

$$|\Phi[u_3(x,y,z)]|<\mathrm{H}^3\mathrm{M}\frac{(Z-z_0)^3}{3!}.$$

Ainsi les séries $\sum u_n$, $\sum u_n'$ convergent comme

$$e^{\mathrm{H}(Z-z_0)};$$

on peut donc écrire

$$\mathrm{A}(u_1+u_2+\ldots)=a\frac{\partial}{\partial x}(u_0+u_1+\ldots)+b\frac{\partial}{\partial y}(u_0+u_1+\ldots)$$
$$+c\frac{\partial}{\partial z}(u_0+u_1+\ldots)+h(u_0+u_1+\ldots),$$

et comme

$$\mathrm{A}(u_0)=f,$$

on a bien

$$\mathrm{A}(u_0+u_1+u_2+\ldots)=a\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_0^\infty u_n\right)+b\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_0^\infty u_n\right)$$
$$+c\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_0^\infty u_n\right)+h\sum_0^\infty u_n+f(x,y,z)$$

4. Conclusion. — Comme Z peut être aussi grand que l'on veut, on peut donc intégrer l'équation (E) dans le même champ où l'on peut *intégrer* l'équation (1).

L'on peut intégrer de même, pour le *problème intérieur*

$$\Delta^{p,1} u = \sum_{1}^{p} a_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu + f(x, t),$$

ainsi que je l'ai dit dans la Préface de ce Mémoire, où j'ai résumé les résultats obtenus sans dissimuler ceux qui restent à obtenir.

Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques (¹);

PAR M. G. HUMBERT.

Dans ce travail, qui forme la troisième et dernière Partie du Mémoire, nous étudions, au point de vue de leurs propriétés arithmétiques, les fonctions abéliennes *triplement* singulières, c'est-à-dire celles dont les périodes g, h, g' vérifient trois relations singulières, $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$.

L'invariant de la relation $xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0$ est, en x, y, z, une forme quadratique ternaire positive; mais ce n'est pas une forme positive quelconque; nous la caractérisons en mettant en évidence ses propriétés fondamentales. Pour simplifier l'écriture nous affectons aux formes de ce type la lettre $\mathcal{F}$.

Si l'on opère sur le système $F_0 = F_1 = F_2 = 0$ une transformation ordinaire du premier degré, ou si on le remplace par un système arithmétiquement équivalent, la forme $\mathcal{F}$ associée reste équivalente à elle-même; c'est-à-dire qu'à un système correspond une *classe* de formes $\mathcal{F}$.

Inversement, à une classe de formes $\mathcal{F}$ correspondent, en général, *plusieurs* systèmes non réductibles l'un à l'autre par une transformation ordinaire de degré *un;* leur recherche est ramenée à l'étude des

(¹) Ce *Journal*, 5e série, t. IX, p. 43.

représentations du discriminant de la classe par une forme quadratique ternaire indéfinie, dont certaines substitutions semblables sont mises en évidence au cours du calcul.

Un système triplement singulier $F_0 = F_1 = F_2 = 0$ donne, pour g, h, g', deux systèmes de valeurs et, par suite, en général, deux systèmes de fonctions abéliennes : appelons *point modulaire* de l'un d'eux le point de l'espace qui a pour coordonnées cartésiennes les trois invariants absolus de la forme binaire algébrique d'ordre 6, liée aux fonctions abéliennes considérées; nous faisons ainsi correspondre, à une classe de formes $\mathcal{F}$, plusieurs points modulaires en nombre limité.

Cette représentation géométrique est la suite naturelle de celle que nous avons donnée dans la deuxième Partie du Mémoire : rappelons en effet qu'à un nombre positif Δ, de l'un des types $4N$ et $4N+1$, nous faisions correspondre la *surface* algébrique hyperabélienne d'invariant Δ; à une classe φ de formes binaires positives, équivalentes à une forme du type

$$4(ax^2 + bxy + cy^2),$$

ou du type

$$4(ax^2 + bxy + cy^2) + y^2,$$

nous faisions correspondre une ou plusieurs *courbes* gauches algébriques que nous avons appelées *courbes hyperabéliennes;* ici enfin, à une classe de formes $\mathcal{F}$, nous lions un groupe de *points* défini algébriquement.

Notre représentation possède des propriétés importantes et simples. Ainsi, pour qu'une classe de formes ternaires $\mathcal{F}$, ou une classe de formes binaires φ, représente proprement un nombre Δ, il faut et il suffit que la surface associée au nombre contienne les points, ou les courbes gauches, liés à la classe $\mathcal{F}$ ou à la classe φ considérée.

De même, pour qu'une classe $\mathcal{F}$ représente proprement une classe φ, il faut et il suffit que les points liés à la classe $\mathcal{F}$ soient sur l'ensemble des courbes liées à la classe φ.

L'étude de l'intersection de deux surfaces ou de deux courbes hyperabéliennes donne aussi d'intéressantes conséquences.

Enfin les ordres de multiplicité, sur une surface hyperabélienne, d'une courbe hyperabélienne ou d'un groupe de points sont liés aux

propriétés arithmétiques des formes; par exemple, si une classe binaire φ représente proprement de n manières un nombre Δ, chacune des courbes hyperabéliennes associées à la classe est multiple d'ordre n sur la surface associée au nombre.

On voit par là combien notre représentation géométrique est profondément liée aux propriétés des formes quadratiques et quel intérêt il y aurait à en développer l'étude [1].

Les numéros de ce Travail font suite à ceux de la Partie déjà publiée; pour indiquer un renvoi à un numéro de cette Partie, nous ferons précéder le nombre correspondant du chiffre romain I.

ERRATA

des deux premières Parties (*ce* Journal, 5e *série, t. IX*)..

Pages.		Au lieu de :	Lire :
47	ligne 1 de la note	$n+1$	$n=+1$
57	dernière ligne,	après ε, mettre un crochet [	
60	quatre dernières équations (31)	$+\varepsilon E a_0$	$-E a_0$
		$+\varepsilon E a_1$	$-E a_1$
		$+\varepsilon E a_2$	$-E a_2$
		$+\varepsilon E a_3$	$-E a_3$
65	dernière équation (36)	$-\varepsilon A_1 c_3$	$-\varepsilon A_1 c_2$
67	ligne 9	*la relation*	*une relation*
87	ligne 2	$-\Omega P a_2$	$\Omega P a_2$
108	ligne 14	$-pX^2$	$+pX^2$
129	ligne 6 (en remontant)	F	$\mathcal{F}$
130	ligne 6 (»)	elle est associée	4ψ est associée

---

[1] Il serait fort utile, en particulier, d'obtenir explicitement les équations des courbes et groupes de points qui correspondent aux formes φ et $\mathcal{F}$ des discriminants les plus simples.

TROISIÈME PARTIE.

Fonctions abéliennes triplement singulières.

Généralités.

80. Les périodes d'une fonction abélienne de deux variables étant ramenées à la forme normale $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g'), la fonction sera dite *triplement* singulière s'il existe, entre g, h, g', trois relations *singulières*, c'est-à-dire de la forme

$$(1) \qquad A_0 g + B_0 h + C_0 g' + D_0(h^2 - gg') + E_0 = 0,$$

$$(2) \qquad A_1 g + B_1 h + C_1 g' + D_1(h^2 - gg') + E_1 = 0,$$

$$(3) \qquad A_2 g + B_2 h + C_2 g' + D_2(h^2 - gg') + E_2 = 0,$$

les A_0, B_0, ..., E_0 et de même les A_1, B_1, ..., E_1 et les A_2, B_2, ..., E_2 étant des entiers premiers entre eux.

On a aussi le droit de supposer sans diviseur commun tous les déterminants tels que $(A_0 B_1 C_2)$, $(A_0 B_1 D_2)$, ..., $(C_0 D_1 E_2)$, formés avec neuf coefficients homologues des équations (1), (2), (3) : car, s'il en était autrement, en combinant linéairement ces équations d'une manière convenable, on obtiendrait une ou deux relations analogues, où les cinq coefficients auraient un facteur commun; par suppression de celui-ci, on formerait évidemment un système de trois équations, équivalent au système initial, et jouissant de la propriété voulue.

Si les dix déterminants $(A_0 B_1 C_2)$, ..., $(C_0 D_1 E_2)$ sont sans diviseur commun, nous dirons que le système (1), (2), (3) est *propre*.

Désignons par F_0, F_1, F_2 les premiers membres de (1), (2), (3), par x, y, z des entiers quelconques; l'invariant de la relation singulière

$$xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0,$$

qui est une conséquence de (1), (2), (3), est la forme *quadratique ternaire* en x, y, z

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &(B_0x + B_1y + B_2z)^2 \\ &- 4(A_0x + A_1y + A_2z)(C_0x + C_1y + C_2z) \\ &- 4(D_0x + D_1y + D_2z)(E_0x + E_1y + E_2z), \end{aligned}\right.$$

que nous appellerons la *forme associée* au système initial.

L'invariant de toute relation singulière est essentiellement positif (ce *Journal*, 5e série, t. V, p. 246); la forme (4) doit donc être définie et positive. Or si l'on pose

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta_i = B_i^2 - 4A_iC_i - 4D_iE_i, \\ &\delta_{ij} = B_iB_j - 2A_iC_j - 2A_jC_i - 2D_iE_j - 2D_jE_i, \end{aligned}\right.$$

la forme ternaire (4) s'écrit

$$(6)\qquad \Delta_0x^2 + \Delta_1y^2 + \Delta_2z^2 + 2\delta_{01}xy + 2\delta_{02}xz + 2\delta_{12}yz;$$

pour qu'elle soit définie et positive, il faut et il suffit que soient satisfaites les conditions classiques

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta_i > 0, \quad \Delta_i\Delta_j - \delta_{ij}^2 > 0, \\ &\Delta_0\Delta_1\Delta_2 + 2\delta_{01}\delta_{02}\delta_{12} - \Delta_0\delta_{12}^2 - \Delta_1\delta_{02}^2 - \Delta_2\delta_{01}^2 > 0. \end{aligned}\right.$$

81. *Réciproquement*, si la forme ternaire associée au système proposé est positive, ou encore si les conditions (7) sont satisfaites, les périodes g, h, g', que déterminent les trois équations (1), (2) et (3), définissent un système de fonctions abéliennes; c'est-à-dire que g, h, g' sont imaginaires, et que leurs parties purement imaginaires, g_1, h_1, g'_1, vérifient l'inégalité fondamentale

$$h_1^2 - g_1g'_1 < 0.$$

Observons d'abord que les équations (1), (2), (3) donnent, pour g, h, g', *deux* systèmes de valeurs; si donc on regarde g, h, g' comme

des coordonnées courantes cartésiennes, les trois *quadriques* représentées par les équations (1) (2) et (3) se coupent en *deux* points, M et M′, à distance finie. D'ailleurs toute relation singulière

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$$

représente une quadrique *réelle,* passant par la conique à l'infini *réelle* située sur le cône $h^2 - gg' = 0$; la quantité $B^2 - 4AC - 4DE$, invariant de cette relation, étant positive, la quadrique est un *hyperboloïde à une nappe.* Donc, les inégalités (7) expriment que toutes les quadriques du réseau $xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0$ sont des hyperboloïdes à une nappe.

Il s'agit maintenant d'établir : 1° que les deux points M et M′, à distance finie, communs à toutes ces quadriques, sont imaginaires et, par suite, conjugués; 2° que si g_1, h_1, g'_1 sont les parties imaginaires des coordonnées de l'un d'eux, on a

$$h_1^2 - g_1 g'_1 < 0. \tag{8}$$

Or, 1° M et M′ sont imaginaires; sinon, il existerait une quadrique *réelle* Q, passant par la conique à l'infini du cône $h^2 - gg' = 0$, par les points M′ et M, et touchant en M un plan *réel* quelconque. Mais ce plan peut être choisi de manière à n'être parallèle à aucune génératrice réelle du cône $h^2 - gg' = 0$; il couperait donc Q suivant deux droites imaginaires, et Q, qui appartient au réseau

$$xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0,$$

ne serait pas un hyperboloïde à une nappe, résultat contraire aux conditions (7).

2° M et M′ étant imaginaires, et dès lors conjugués, le point milieu de MM′ est réel; transportons-y l'origine des coordonnées, sans changer la direction des axes; nous ne changerons pas non plus les parties *imaginaires,* g_1, h_1, g'_1, des coordonnées de M et M′. Une des quadriques du réseau $xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0$ a pour centre la nouvelle origine et a dès lors une équation de la forme

$$h^2 - gg' = E, \tag{9}$$

E étant > 0, puisque la surface (9) est un hyperboloïde à une nappe. La droite MM′ étant réelle et passant par l'origine a des équations du type

$$\frac{g}{\alpha} = \frac{h}{\beta} = \frac{g'}{\gamma}, \tag{10}$$

et l'on a

$$\beta^2 - \alpha\gamma < 0,$$

puisque la droite (10) coupe la quadrique (9) en deux points imaginaires (M et M′). Les équations (9) et (10) fournissent alors les coordonnées de M et de M′ et donnent, pour g_1, h_1, g'_1,

$$g_1 = \alpha\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}, \qquad h_1 = \beta\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}, \qquad g'_1 = \gamma\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}},$$

d'où l'on tire

$$h_1^2 - g_1 g'_1 = -E,$$

et, puisque E est négatif, on a bien

$$h_1^2 - g_1 g'_1 < 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

82. *Invariants.* — On reconnaît, comme dans la deuxième Partie de ce travail (I, n° **16**) qu'une transformation ordinaire du premier degré change les trois relations singulières $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ en $F'_0 = 0$, $F'_1 = 0$, $F'_2 = 0$, qui forment également un système propre. De plus, la forme associée au système initial demeure inaltérée, c'est-à-dire que les coefficients Δ_i et δ_{ij} de cette forme sont des *invariants*, vis-à-vis de toute transformation ordinaire de degré *un*.

De même, remplaçons le système $F_0 = F_1 = F_2 = 0$ par un système *arithmétiquement équivalent :*

$$\lambda F_0 + \mu F_1 + \nu F_2 = 0,$$
$$\lambda' F_0 + \mu' F_1 + \nu' F_2 = 0,$$
$$\lambda'' F_0 + \mu'' F_1 + \nu'' F_2 = 0,$$

les λ, μ, ν désignant des entiers, dont le déterminant $(\lambda\mu'\nu'')$ est égal à ± 1. La forme ternaire associée à ce nouveau système est, par définition, l'invariant de la relation

$$x'(\lambda F_0 + \mu F_1 + \nu F_2) + y'(\lambda' F_0 + \mu' F_1 + \nu' F_2) \\ + z'(\lambda'' F_0 + \mu'' F_1 + \nu'' F_2) = 0,$$

qui s'écrit

$$(\lambda x' + \lambda' y' + \lambda'' z') F_0 + (\mu x' + \mu' y' + \mu'' z') F_1 \\ + (\nu x' + \nu' y' + \nu'' z') F_2 = 0;$$

on l'obtient donc en remplaçant, dans la forme (4), x, y, z par $\lambda x' + \lambda' y' + \lambda'' z'$, $\mu x' + \ldots$, $\nu x' + \ldots$. En d'autres termes, puisque le déterminant $(\lambda\mu'\nu'')$ est égal à ± 1, la forme ainsi obtenue en x', y', z', est *équivalente* à la forme (4), associée au système initial.

De ces remarques résulte cette proposition :

83. Théorème. — *A tout système propre de trois relations singulières,* $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, *correspond une forme quadratique ternaire positive en* x, y, z, *qui est l'invariant de la relation* $xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0$; *cette forme se change en une forme équivalente quand on remplace le système initial par un système arithmétiquement équivalent, ou quand on opère sur lui une transformation ordinaire du premier degré.*

Ainsi, à tout système propre est associée, en réalité, une *classe* de formes quadratiques ternaires positives.

Il résulte également de là que le système considéré possède un *invariant absolu,* à savoir le discriminant de la classe associée, quantité toujours positive d'après (7).

84. La forme (4), associée à un système propre, n'est pas une forme ternaire positive quelconque; en effet, en vertu même de son expression (4), elle est représentable par la forme à cinq variables

$$X^2 - 4YZ - 4TU,$$

et la représentation est *propre*, puisque, le système étant propre, les dix déterminants $(A_0 B_1 C_2)$, ..., $(C_0 D_1 E_2)$ n'ont aucun facteur commun.

Or, il est clair, *a priori*, qu'une forme ternaire n'est pas toujours représentable par la forme à cinq variables; il est *nécessaire* pour cela qu'elle puisse représenter un carré, propriété qui n'appartient évidemment pas à toutes les formes ternaires et sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Ainsi, les seules formes ternaires positives qui puissent être associées à un système propre de trois relations singulières sont les formes représentables proprement par la forme $X^2 - 4YZ - 4TU$; cette condition nécessaire est également suffisante, car la forme

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &(\beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z)^2 - 4(\alpha_0 x + \alpha_1 y + \alpha_2 z)(\gamma_0 x + \gamma_1 y + \gamma_2 z) \\ &\qquad - 4(\delta_0 x + \delta_1 y + \delta_2 z)(\varepsilon_0 x + \varepsilon_1 y + \varepsilon_2 z) \end{aligned}\right.$$

est associée au système

$$\begin{aligned} &\alpha_0 g + \beta_0 h + \gamma_0 g' + \delta_0 (h^2 - gg') + \varepsilon_0 = 0, \\ &\alpha_1 g + \beta_1 h + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ &\alpha_2 g + \beta_2 h + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{aligned}$$

qui est propre, puisque, la représentation de la forme (11) par la forme $X^2 - 4YZ - 4TU$ étant propre, les dix déterminants

$$(\alpha_0 \beta_1 \gamma_2), \quad \ldots, \quad (\gamma_0 \delta_1 \varepsilon_2)$$

sont premiers entre eux.

Étant donnée une forme ternaire positive, les méthodes générales classiques permettent de reconnaître si elle est représentable proprement par $X^2 - 4YZ - 4TU$; dans tout ce qui suit nous désignerons une forme ainsi représentable par la lettre $\mathcal{F}$.

Propriétés des formes $\mathcal{F}$.

85. Il y a deux espèces de formes $\mathcal{F}$.

Si, dans les trois équations (1), (2), (3) d'un système singulier propre, les coefficients de h, à savoir B_0, B_1, B_2, sont pairs, cette pro-

priété se conserve, comme on sait, dans toute transformation ordinaire de degré *un;* en ce cas, la forme $\mathcal{F}$, associée au système et donnée par (4), a tous ses coefficients divisibles par 4, de sorte qu'on peut écrire

$$(12) \qquad \mathcal{F}(x, y, z) = 4f(x, y, z).$$

Si, dans les équations (1), (2), (3), un des coefficients B_i, le premier B_0, par exemple, est impair, on aura le droit de supposer les deux autres pairs : car si B_1 était impair, il suffirait de remplacer $F_1 = 0$ par l'équation équivalente $F_1 + F_0 = 0$. Dès lors, B_1 et B_2 étant pairs, la forme $\mathcal{F}$ associée au système est du type

$$(13) \qquad \mathcal{F}(x, y, z) = x^2 + 4f(x, y, z).$$

Les formes $\mathcal{F}$ sont donc, soit du type (12), soit réductibles au type (13) par une substitution linéaire de déterminant 1.

86. Une forme $\mathcal{F}$ ne peut admettre d'autre diviseur que 4, c'est-à-dire que, si elle est du type (13), elle est proprement primitive, et que, si elle est du type (12), les coefficients de f n'ont aucun facteur commun.

Nous pouvons toujours en effet, par une transformation ordinaire de degré *un,* ramener une des équations singulières (1), (2), (3), ou une de leurs combinaisons linéaires, au type $h^2 - gg' = D$; dès lors, les deux autres équations du système, si l'on tient compte de celle-ci, prendront la forme

$$a\,g + b\,h + c\,g' + d = 0,$$
$$a'g + b'h + c'g' + d' = 0.$$

Par des combinaisons linéaires des deux dernières, on obtiendra deux relations arithmétiquement équivalentes dans l'une desquelles le coefficient de g sera nul, c'est-à-dire qu'on a le droit de supposer $a' = 0$; la forme associée au système est par suite

$$\mathcal{F} = 4Dx^2 + (b^2 - 4ac)y^2 + b'^2z^2 + 2(bb' - 2ac')yz - 4dxy - 4d'zx.$$

Or : 1° lorsque b et b' sont pairs, $\mathcal{F}$ ne peut admettre d'autre divi-

seur que 4 : car, si les coefficients D, $\frac{1}{2}b'$, $\frac{1}{4}b^2 - ac$, $\frac{b'}{2}b - ac'$, d, d' avaient un facteur premier commun, ρ, impair ou pair, ce facteur diviserait a ou c'. S'il divisait a, il diviserait aussi $\frac{1}{2}b$, et dès lors le système des deux relations

$$ag + bh + cg' + d = 0, \qquad b'h + c'g' + d' = 0,$$

ne serait pas *propre*, puisque a, $\frac{1}{2}b$, d, $\frac{1}{2}b'$, d' admettant le facteur ρ, les déterminants compris dans la matrice

$$\begin{matrix} a & b & c & d, \\ 0 & b' & c' & d', \end{matrix}$$

l'admettraient également, contrairement à l'hypothèse initiale. Si ρ divisait c', la relation $b'h + c'g' + d' = 0$ aurait tous ses coefficients divisibles par ρ, et, là encore, le système considéré ne serait pas *propre*.

2° Lorsque b et b' ne sont pas tous deux pairs, $\mathfrak{F}$ ne peut admettre aucun diviseur : car, si les coefficients D, b', $b^2 - 4ac$, $bb' - 2ac'$, d, d' avaient un facteur premier *impair* commun, ce facteur diviserait a ou c', et l'on reconnaîtrait comme plus haut que le système considéré ne serait pas *propre*, contrairement à l'hypothèse.

87. Reprenons le cas où, dans les trois équations initiales (1), (2), (3), du système, les trois coefficients B_0, B_1, B_2 sont pairs; comme nous venons de le voir, la forme associée est du type $4f(x, y, z)$, les coefficients de la forme f n'ayant aucun facteur commun. Je dis de plus que cette forme f ne peut être proprement primitive, c'est-à-dire que les coefficients des rectangles xy, xz, yz ne peuvent y être simultanément pairs.

Ces coefficients, en effet, sont, d'après (4), les quantités

$$2\frac{B_i}{2}\frac{B_j}{2} - A_iC_j - A_jC_i - D_iE_j - D_jE_i;$$

si elles étaient paires, il en serait de même des trois nombres α_0, α_1, α_2

donnés par

$$\alpha_0 = A_1 C_2 - A_2 C_1 + D_1 E_2 - D_2 E_1,$$
$$\alpha_1 = A_2 C_0 - A_0 C_2 + D_2 E_0 - D_0 E_2,$$
$$\alpha_2 = A_0 C_1 - A_1 C_0 + D_0 E_1 - D_1 E_0;$$

dès lors les déterminants $(A_0 C_1 D_2)$, $(A_0 C_1 E_2)$, $(A_0 D_1 E_2)$, $(C_0 D_1 E_2)$ seraient pairs, car, le premier, par exemple, est égal à

$$\alpha_0 D_0 + \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2.$$

Donc, puisque les B_i sont pairs, les dix déterminants $(A_0 B_1 C_2)$, ..., $(C_0 D_1 E_2)$ seraient pairs, et le système initial, (1), (2), (3), ne serait pas *propre*, contrairement à l'hypothèse.

88. On peut résumer ainsi tous ces résultats :

Les formes $\mathcal{F}$ sont de deux espèces. Les formes de la première espèce sont divisibles par 4 et sont du type $4f(x, y, z)$, la forme $2f$ étant improprement primitive.

Les formes de la seconde espèce sont proprement primitives et sont équivalentes à des formes du type $x^2 + 4f'(x, y, z)$.

Dans tout ce travail, afin de simplifier les démonstrations et les formules, nous nous bornerons à l'étude des formes de la première espèce, en indiquant, s'il y a lieu, les résultats relatifs aux formes de la seconde.

89. *Formes canoniques d'un système et de la forme associée.* — Soit un système propre (1), (2), (3), où les B_i sont tous pairs; on pourra, par une transformation ordinaire du premier degré et par des combinaisons linéaires d'équations, le ramener (n° **86**) au type

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} h^2 - gg' - D &= 0,\\ \alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' + \delta_1 &= 0,\\ \alpha'_1 g + 2\beta'_1 h + \gamma'_1 g' + \delta'_1 &= 0.\end{aligned}\right.$$

On a le droit de supposer α_1 et α'_1 premiers entre eux : car, s'ils ne

l'étaient pas, une transformation de degré *un*, n'altérant pas la relation $h^2 - gg' = D$, remplacerait α_1 par la quantité α_0, dont l'expression a été donnée (I, n° **26**), dans la deuxième Partie du Mémoire, et α'_1 par une quantité analogue, α'_0 : or, on reconnaît sans difficulté, en s'appuyant sur ce que le système (14) est propre, qu'on peut toujours choisir les entiers caractéristiques de la transformation de manière que α_0 et α'_0 soient premiers entre eux.

Il en résulte qu'en combinant linéairement les deux dernières relations (13), on obtiendra deux relations de même forme, dans l'une desquelles le coefficient de g sera 1, et qui seront arithmétiquement équivalentes aux précédentes; le système initial sera dès lors remplacé par le système *propre* équivalent :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} h^2 - gg' - D &= 0,\\ g + 2\beta h + \gamma g' + \delta &= 0,\\ \alpha' g + 2\beta' h + \gamma' g' + \delta' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Je dis qu'on peut supposer $\beta = 0$: car, si $\beta \gtrless 0$, la transformation du premier degré définie par les entiers

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 0,\\ b_0 = \beta, & b_1 = 1, & b_2 = 0, & b_3 = 0,\\ c_0 = 0, & c_1 = 0, & c_2 = 1, & c_3 = 0,\\ d_0 = 0, & d_1 = 0, & d_2 = -\beta, & d_3 = 1 \end{array}$$

n'altère pas la relation $h^2 - gg' - D = 0$ (I, n° **10**) ; en vertu des formules (27), (I, n° **26**), elle remplace la relation $g + 2\beta h + \gamma g' + \delta = 0$ par une relation analogue où le coefficient de h a disparu, et où celui de g est encore $+1$.

En ajoutant à la troisième relation (15) la deuxième multipliée par $-\alpha'$, on obtient une équation privée de terme en g, qui peut remplacer cette troisième, de sorte que le système initial est devenu

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} h^2 - gg' - D &= 0,\\ g - pg' - q &= 0,\\ 2\beta h + \gamma g' + \delta &= 0. \end{aligned}\right.$$

On peut aller plus loin et faire disparaître g' de la dernière relation : il suffit d'opérer, sur ce système, la transformation du premier degré définie par les entiers

$$\begin{array}{llll}
a_0 = 1, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\
b_0 = 0, & b_1 = \mu', & b_2 = -\lambda', & b_3 = 0, \\
c_0 = 0, & c_1 = -\mu, & c_2 = \lambda, & c_3 = 0, \\
d_0 = p\mu\mu' + D\lambda\lambda' + q\mu\lambda', & d_1 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = 1;
\end{array}$$

où λ, μ, λ', μ' sont des entiers uniquement liés par l'équation

$$\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1.$$

En vertu de cette transformation, les périodes anciennes et nouvelles satisfont aux relations

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
G &= \frac{1}{\lambda + \lambda' g'}[-\lambda d_0 + \lambda g - \lambda' d_0 g' - \lambda'(h^2 - gg')], \\
H &= \frac{h}{\lambda + \lambda' g'}, \\
G' &= \frac{\mu + \mu' g'}{\lambda + \lambda' g'}, \\
H^2 - GG' &= \frac{1}{\lambda + \lambda' g'}[\mu d_0 - \mu g + \mu' d_0 g' + \mu'(h^2 - gg')].
\end{aligned}\right.$$

Or, le système (16), où l'on écrit G, H, G' à la place de g, h, g', est arithmétiquement équivalent au système

$$\begin{aligned}
\lambda(H^2 - GG' - D) + \mu(G - pG' - q) &= 0, \\
\lambda'(H^2 - GG' - D) + \mu'(G - pG' - q) &= 0, \\
2\beta h + \gamma g' + \delta &= 0,
\end{aligned}$$

puisque $\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1$. Par les formules (17), ce système se change en

$$\begin{aligned}
h^2 - gg' - (D\lambda^2 + q\lambda\mu + p\mu^2) &= 0, \\
g - (D\lambda'^2 + q\lambda'\mu' + p\mu'^2)g' - [2D\lambda\lambda' + q(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + 2p\mu\mu'] &= 0, \\
2\beta h + (\gamma\mu' + \delta\lambda')g' + \gamma\mu + \delta\lambda &= 0.
\end{aligned}$$

Si donc on choisit λ' et μ' *premiers entre eux*, de manière à annuler $\gamma\mu' + \delta\lambda'$, et si l'on détermine ensuite λ et μ par $\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1$, le terme en g' disparaîtra dans la troisième équation, et le système final, équivalent au système initial, sera du type

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} h^2 - gg' - M &= 0, \\ g - mg' - n &= 0, \\ 2\beta h - \varepsilon &= 0; \end{aligned} \right.$$

ε étant nécessairement impair, puisque le système transformé est *propre*.

Remarque I. — Dans le cas d'un système singulier où les coefficients de h ne sont pas tous pairs, on trouverait une forme canonique semblable; 2β serait seulement remplacé par $2\beta + 1$ dans la troisième équation.

Remarque II. — La forme associée au système (18) est

$$(19) \qquad 4(Mx^2 + my^2 + \beta^2 z^2 + nxy + \varepsilon xz),$$

le coefficient de z^2 est un carré et le terme en xy manque. Toute forme $\mathcal{F}$, divisible par 4, peut donc être ramenée à ce type par une substitution linéaire.

90. *Propriétés caractéristiques des formes $\mathcal{F}$.* — D'après cela, et l'on aurait pu le reconnaître directement sur la forme (4), une forme $\mathcal{F}$ quelconque peut représenter proprement un carré : ici, le carré $4\beta^2$. Or, c'est là une propriété qui caractérise les formes $\mathcal{F}$, ainsi que le montre le théorème suivant, relatif aux formes de la première espèce :

Théorème. — *Soit ψ une forme quadratique ternaire positive et improprement primitive; désignons par Ω le plus grand commun diviseur, nécessairement impair, des coefficients de son adjointe : pour que 2ψ soit une forme $\mathcal{F}$, c'est-à-dire soit représentable proprement par la forme à cinq variables $X^2 - 4YZ - 4TU$, il faut et il suffit que 2ψ représente un carré premier à Ω.*

La condition est nécessaire, car la forme (19) représente le carré $4\beta^2$, que je dis être premier à Ω. En effet Ω est, par définition, le plus grand commun diviseur de

$$4mM - n^2, \quad 4M\beta^2 - \varepsilon^2, \quad 4m\beta^2, \quad 2m\varepsilon, \quad 2n\beta^2, \quad n\varepsilon;$$

s'il avait un facteur premier commun avec 2β, ce facteur diviserait ε^2, donc ε; et le système (18) ne serait pas propre, puisque 2β et ε auraient un diviseur commun.

91. Je dis maintenant que la condition est suffisante.

Soit, en effet, une forme ternaire positive

$$(20) \qquad 2\psi = 4(B^2z^2 + Mzx + Nzy + Px^2 + Qxy + Ry^2),$$

telle que ψ soit improprement primitive, et qui représente le carré $4B^2$, premier à Ω; pour établir que c'est une forme $\mathcal{F}$, je distinguerai trois cas.

Premier cas. — Les quantités $2B$, M, N n'ont pas de diviseur commun. Alors le système

$$\begin{aligned} h^2 - gg' - P &= 0, \\ g - Rg' - Q &= 0, \\ 2Bh - Ng' - M &= 0 \end{aligned}$$

donne naissance à la forme

$$\mathcal{F} = 4B^2z^2 + 4y(Ry + Nz) + 4x(Px + Qy + Mz),$$

qui est identique à la forme proposée, 2ψ; ce système est *propre*, ainsi qu'on le reconnaît de suite en s'appuyant sur ce que 2β, M, N sont sans facteur commun. La forme 2ψ considérée est donc une forme $\mathcal{F}$.

Deuxième cas. — Les quantités $2B$, M, N ont un diviseur commun *impair*. Soient ρ ce plus grand commun diviseur, et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ses facteurs premiers distincts. Aucun d'eux ne divise $4PR - Q^2$, sinon, contrairement à l'hypothèse initiale, $2B$ et Ω admettraient ce même

facteur, ainsi qu'on le reconnaît de suite en écrivant les coefficients de la forme adjointe à ψ. Il en résulte que la forme binaire

$$Px^2 + Qxy + Ry^2$$

peut représenter proprement une infinité de nombres, dont chacun est résidu quadratique de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, et est premier à ces facteurs. On a le droit de supposer que R est un de ces nombres; car il suffit pour cela d'effectuer, sur x et y dans la forme ternaire (20), une substitution linéaire convenable, de déterminant 1, en laissant z inaltéré : cette opération ne change ni B, ni le plus grand commun diviseur de 2B, M, N, ni Ω qui est un invariant de la forme ternaire.

Cela posé, divisons N par un nombre α, tel que 2B, M et $\frac{1}{\alpha}$N n'aient pas de diviseur commun : on peut évidemment supposer que α ne contient pas d'autres facteurs premiers que $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Considérons maintenant le système singulier

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} h^2 - gg' - P &= 0, \\ \alpha g + 2\beta h + \gamma g' - Q &= 0, \\ 2Bh - \frac{N}{\alpha} g' - M &= 0; \end{aligned} \right.$$

la forme associée est

$$(22) \quad 4[B^2 z^2 + Mzx + Nzy + Px^2 + Qxy + (\beta^2 - \alpha\gamma)y^2];$$

elle coïncide avec la forme proposée (20) si l'on peut choisir β et γ de manière que $R = \beta^2 - \alpha\gamma$: il faut et il suffit pour cela que R soit résidu quadratique de α, c'est-à-dire des facteurs premiers, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de α, condition qui est réalisée en vertu d'une hypothèse légitime faite tout à l'heure. Donc la forme (20) est associée au système (21).

Tout revient ainsi à établir que ce système (21) est propre, c'est-à-dire que les nombres

$$(23) \quad 2B\alpha, \quad N, \quad M\alpha, \quad 2\left(B\gamma + \frac{1}{\alpha}N\beta\right), \quad 2(M\beta - BQ), \quad M\gamma + \frac{1}{\alpha}NQ$$

n'ont aucun diviseur premier commun. Or $2B$, $\frac{1}{\alpha}N$ et M étant premiers entre eux, ce diviseur diviserait α, et serait dès lors un des facteurs $p_1, p_2, \ldots p_n$. Mais p_i, premier à R par hypothèse, ne peut diviser β, puisque $R = \beta^2 - \alpha\gamma$; comme il divise B, il ne peut diviser $2\left(B\gamma + \frac{1}{\alpha}N\beta\right)$, car $\frac{N}{\alpha}$, en vertu même de la définition de α, n'admet aucun des facteurs p_i. Il résulte de là que le système (21) est propre; et la forme 2ψ, définie par (20), est bien encore une forme $\mathcal{F}$.

Troisième cas. — Les quantités $2B$, M, N ont un diviseur commun *pair*, dont les facteurs premiers sont $2, p_1, p_2, \ldots, p_n$.

En ce cas, M et N sont pairs et Q est impair, puisque, par hypothèse, la forme ψ est improprement primitive.

Soit encore α un nombre formé avec les facteurs $2, p_1, \ldots, p_n$, et tel que $2B$, M et $\frac{N}{\alpha}$ soient premiers entre eux. Le système (21) donne naissance à la forme (22), qui est identique à (19) si R est résidu quadratique de α : il en sera évidemment ainsi si R est résidu quadratique de 8, de p_1, de $p_2, \ldots$, de p_n; c'est-à-dire si la forme

$$(24) \qquad Px^2 + Qxy + Ry^2$$

peut représenter proprement un nombre de la forme $8h + 1$, qui soit résidu quadratique de chacun des p_i, et premier à ces facteurs.

Or, la quantité $4PR - Q^2$ étant première à $p_1, \ldots, p_n$, comme on l'a vu plus haut (deuxième cas), la forme (24) représente proprement des nombres résidus quadratiques des p_i; soit x_0, y_0 une solution : si ϖ est le produit $p_1 p_2 \ldots p_n$, une autre solution sera $x = 8x_0 + \lambda\varpi$, $y = 8y_0 + \mu\varpi$, λ et μ étant des entiers quelconques. Cherchons à les déterminer de manière que, pour ces valeurs de x et de y, la forme (24) représente un nombre $8h + 1$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\varpi^2(P\lambda^2 + Q\lambda\mu + R\mu^2) \equiv 1 \pmod 8,$$

ou, puisque ϖ^2, carré d'un nombre impair, est $\equiv 1 \pmod 8$,

$$(25) \qquad P\lambda^2 + Q\lambda\mu + R\mu^2 \equiv 1 \pmod 8.$$

Or, Q étant impair, on peut supposer P et R simultanément pairs ou impairs, car si, par exemple, P est pair et R impair, le changement de variable $\lambda = \lambda' + \mu$ rendra R pair.

Il résulte maintenant d'un beau travail de M. Jordan (ce *Journal*, 2e série, t. XVII, p. 376 et suivantes) que la congruence (25) est alors réductible à l'une ou l'autre de celles-ci :

$$\lambda'\mu' \equiv 1 \pmod 8,$$
$$\lambda'^2 + \lambda'\mu' + \mu'^2 \equiv 1 \pmod 8,$$

qui ont manifestement des solutions et donnent, dès lors, des solutions correspondantes de (25).

Donc, β et γ étant déterminés d'après ces indications, la forme proposée (20) sera associée au système (21), et il ne reste plus qu'à montrer que ce système est propre. On reconnaît, comme dans le *deuxième cas*, que les six quantités (23) ne sauraient avoir, comme facteur premier commun, que l'un des nombres $2, p_1, p_2, \ldots, p_n$, et que p_i ne peut les diviser toutes. Quant au facteur 2, il ne les divise pas non plus, car la dernière, $M\gamma + \frac{1}{\alpha}NQ$, est impaire, puisque M est pair, Q et $\frac{N}{\alpha}$ impairs.

Par suite encore, la forme 2ψ, donnée par (20), est une forme $\mathcal{F}$, et le théorème énoncé au n° **90** est complètement établi.

92. On peut lui donner une autre forme :

Théorème. — *Soit ψ une forme quadratique ternaire positive, improprement primitive; soit Ω le plus grand commun diviseur, nécessairement impair, des coefficients de l'adjointe : pour que 2ψ soit une forme $\mathcal{F}$, il faut et il suffit qu'elle puisse représenter un carré et que ses caractères quadratiques par rapport aux facteurs premiers $\omega_1, \omega_2, \ldots,$ de Ω, soient tous égaux à $+1$, c'est-à-dire qu'on ait*

$$\left(\frac{2\psi}{\omega_1}\right) = \left(\frac{2\psi}{\omega_2}\right) = \ldots = +1.$$

Pour ramener cette proposition au théorème précédent, observons

que, d'après ce théorème, toute forme $\mathcal{F}$ du type ψ, pouvant représenter un carré premier à Ω, les caractères quadratiques $\left(\frac{2\psi}{\omega_\alpha}\right)$ sont nécessairement égaux à $+1$. Il reste donc seulement à montrer que, si 2ψ représente un carré *non premier à* Ω, et si tous les caractères $\left(\frac{2\psi}{\omega_\alpha}\right)$ sont égaux à $+1$, 2ψ est encore une forme $\mathcal{F}$.

Soit alors $4B^2$ le carré dont il s'agit, 2ψ peut s'écrire

$$(20) \qquad 2\psi = 4(B^2z^2 + Mzx + Nzy + Px^2 + Qxy + Ry^2);$$

par hypothèse, $2B$ et Ω ne sont pas premiers entre eux, c'est-à-dire que les nombres

$$2B, \quad 4B^2P - M^2, \quad 4B^2R - N^2, \quad 2B^2Q - MN, \quad 4PR - Q^2,$$
$$2MR - NQ, \quad 2NP - MQ,$$

ont un diviseur commun : il en résulte que $2B$, M, N ont aussi un diviseur commun ρ, et que certains des facteurs premiers de ρ entrent dans $4PR - Q^2$. Soient ω', ω'', ..., ces facteurs; ils figurent nécessairement parmi ceux ω_1, ω_2, ..., de Ω.

Cela posé, si ρ est impair, le raisonnement du n° **91** sera encore applicable, pourvu que la forme binaire $Px^2 + Qxy + Ry^2$ puisse représenter un résidu quadratique de tous les facteurs premiers de ρ. Il n'y a de difficulté que pour ceux de ces facteurs ω', ω'', ..., qui entrent dans $4PR - Q^2$; la représentation considérée n'est possible que si le caractère quadrique de la forme binaire par rapport à chacun des nombres ω', ω'', ..., est égal à $+1$. Mais cette condition se trouve satisfaite; car, par hypothèse, le caractère quadratique de 2ψ par rapport à ω_1, ω_2, ... est $+1$: d'ailleurs, ω', ω'' ... sont des diviseurs de $2B$, M, N et figurent parmi les ω_1, ω_2, ...; donc, en vertu de l'expression (20) de 2ψ, les caractères quadratiques de $Px^2 + Qxy + Ry^2$ par rapport à ω', ω'', ... sont égaux à ceux de 2ψ, c'est-à-dire à $+1$.

La démonstration serait la même si ρ était pair.

Remarque I. — Le théorème précédent permet de reconnaître, sans ambiguïté possible, si une forme 2ψ, telle que ψ soit positive et

improprement primitive, est une forme $\mathcal{F}$: Arn. Meyer (¹) et M. Minkowski (²) ont en effet donné des règles pour reconnaître si une forme ternaire peut représenter un carré, ou, ce qui est plus général, si une forme quaternaire peut représenter *zéro*.

Remarque II. — On verrait de même que, pour qu'une forme ternaire positive, primitive, équivalente à une forme du type

$$4f'(x, y, z) + x^2,$$

soit une forme $\mathcal{F}$, il faut et il suffit qu'elle puisse représenter un carré et que ses caractères quadratiques, par rapport aux diviseurs premiers de Ω, soient tous égaux à $+1$.

Transformations d'un système singulier en lui-même.

93. Soit S un système de trois relations singulières, que nous désignerons par $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$; soit 2ψ la forme ternaire associée à S. Existe-t-il des transformations ordinaires de degré 1 qui n'altèrent pas le système S?

Une telle transformation T changera respectivement f_0, f_1, f_2, après l'expulsion des dénominateurs, en des fonctions linéaires de f_0, f_1, f_2 à coefficients entiers, soit

$$lf_0 + l'f_1 + l''f_2, \quad mf_0 + m'f_1 + m''f_2, \quad nf_0 + n'f_1 + n''f_2;$$

par suite (n° **82**), les invariants des deux expressions singulières

$$(1) \quad \begin{cases} xf_0 + yf_1 + zf_2, \\ \text{et} \\ (lx + my + nz)f_0 + (l'x + m'y + n'z)f_1 \\ \qquad + (l''x + m''y + n''z)f_2 \end{cases}$$

(¹) *Züricher naturf. Gesell.*, 1884, p. 218.

(²) Crelle, t. 106. — *Voir* aussi Bachmann, *Zahlentheorie*, IVe Partie, p. 551.

seront les mêmes, c'est-à-dire qu'on aura identiquement, quels que soient x, y, z,

$$(2)\quad \begin{cases} 2\psi(x, y, z) \\ \quad = 2\psi(lx + my + nz,\ l'x + m'y + n'z,\ l''x + m''y + n''z). \end{cases}$$

Donc, la substitution Σ (à coefficients entiers)

$$(3)\quad \Sigma = |x, y, z;\ lx + my + nz,\ l'x + m'y + n'z,\ l''x + m''y + n''z|$$

est une *substitution semblable* de la forme associée 2ψ, c'est-à-dire une de celles qui changent la forme ψ en elle-même.

On peut indiquer avec plus de précision la nature de la substitution Σ. En effet, la transformation T change l'une dans l'autre, après expulsion du dénominateur, les expressions (1), non seulement lorsque x, y, z sont des entiers, mais lorsque ce sont des constantes quelconques; cherchons à déterminer ces constantes de manière que la seconde expression soit égale à la première multipliée par un facteur constant s. On trouve, par un calcul classique, que s doit être une racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} l - s & m & n \\ l' & m' - s & n' \\ l'' & m'' & n'' - s \end{vmatrix} = 0,$$

qui est l'*équation caractéristique* de la substitution Σ. Soit s_1 une de ces racines; il existe dès lors des quantités x_1, y_1, z_1, telles que $x_1 f_0 + y_1 f_1 + z_1 f_2$ soit changé par T en $s_1(x_1 f_0 + y_1 f_1 + z_1 f_2)$. Or si l'on nomme invariant d'une expression du type

$$(4)\qquad \mathrm{A}g + \mathrm{B}h + \mathrm{C}g' + \mathrm{D}(h^2 - gg') + \mathrm{E},$$

même lorsque A, B, ..., E ne sont pas entiers, la quantité

$$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} - 4\mathrm{DE},$$

on reconnaît qu'une transformation ordinaire du premier ordre quelconque change (après suppression du dénominateur tel qu'il se présente

dans les formules de la transformation) l'expression (4) en une expression analogue de même invariant. Donc, en appliquant ce résultat aux deux expressions

$$x_1 f_0 + y_1 f_1 + z_1 f_2 \quad \text{et} \quad s_1(x_1 f_0 + y_1 f_1 + z_1 f_2),$$

on trouve

$$2\psi(x_1, y_1, z_1) = 2s_1^2 \psi(x_1, y_1, z_1),$$

ce qui exige, puisque la forme ψ est positive, qu'on ait $s_1^2 = 1$ ou $s_1 = \pm 1$.

Donc, si une transformation ordinaire de degré 1, T, n'altère pas le système S, *il est nécessaire* que la substitution semblable de ψ correspondante n'admette, comme racines de son équation caractéristique, que les quantités ± 1.

Dès lors deux cas sont à distinguer.

94. Premier cas. — L'équation caractéristique de la substitution Σ admet la racine triple $s = \varepsilon$, ε désignant ± 1.

En ce cas, on sait que Σ peut se ramener, par un changement linéaire de variables, de déterminant 1, à la forme Σ_1 :

$$\Sigma_1 = |x, y, z; \ \varepsilon x, \ \varepsilon y + \lambda x, \ \varepsilon z + \mu x + \nu y|.$$

Je dis que les entiers λ, μ, ν sont nuls. Il existe en effet une forme ψ_1, équivalente à ψ, qui demeure inaltérée par Σ_1 ; soit

$$\psi_1 = 2Ax^2 + 2A'y^2 + 2A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

On aura dès lors

$$\begin{aligned} 2Ax^2 + 2A'(\varepsilon y + \lambda x)^2 + 2A''(\varepsilon z + \mu x + \nu y)^2 + \ldots \\ = 2Ax^2 + 2A'y^2 + 2A''z^2 + \ldots; \end{aligned}$$

d'où, en égalant dans les deux membres les coefficients de yz, $A''\varepsilon\nu = 0$. Comme A'' ne peut être nul, puisque la forme ψ_1 est positive, on a

$\nu = 0$. Égalons maintenant les coefficients de xz et de xy, il vient

$$(2A''\mu + B\lambda)\varepsilon = 0,$$
$$(B\mu + 2A'\lambda)\varepsilon = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\lambda = \mu = 0,$$

car le déterminant $4A'A'' - B^2$ doit être positif pour que ψ_1 soit positive.

Donc, enfin, Σ_1 n'est autre chose que la *substitution* $(+1)$

$$|x, y, z;\ x, y, z|,$$

ou la *substitution* (-1)

$$|x, y, z;\ -x, -y, -z|,$$

selon que $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$.

Il en résulte que la substitution Σ, dont Σ_1 se déduisait par un changement de variables linéaire, doit être également *l'une des substitutions* $+1$ *ou* -1.

La question est donc de reconnaître s'il existe une transformation ordinaire de degré 1, T, changeant respectivement f_0, f_1, f_2 en εf_0, εf_1, εf_2, c'est-à-dire changeant, quels que soient x, y, z, l'expression $xf_0 + yf_1 + zf_2$ en $\varepsilon(xf_0 + yf_1 + zf_2)$.

Les formules établies dans la première Partie de ce Mémoire (I, n° **7**) permettent de traiter aisément cette question, en partant de la forme canonique (n° **89**) du système proposé; on arrive aux résultats suivants que nous nous bornerons à énoncer :

1° *En dehors de la transformation unité, il n'existe pas de transformation ordinaire d'ordre* $+1$ *changeant* f_0, f_1, f_2 *respectivement en* εf_0, εf_1, εf_2, *la quantité* ε *étant* ± 1;

2° *Il* peut *exister, si certaines conditions sont vérifiées par les coefficients du système, une transformation ordinaire d'ordre* -1 *changeant* f_0, f_1, f_2 *en* εf_0, εf_1, εf_2, *la quantité* ε *étant* $+1$.

95. Deuxième cas. — L'équation caractéristique de la substitution Σ admet comme racine double ε, et, comme racine simple, $-\varepsilon$.

On reconnaît alors sans difficulté que la forme ψ initiale est équivalente à une forme de l'un des deux types

$$\psi_2 = 2(Ax^2 + A'y^2 + B''xy + A''z^2),$$
$$\psi_3 = 2[Ax^2 + A'y^2 + A''(z^2 - \varepsilon yz) + B''xy];$$

ψ_2 admet la substitution semblable $|x, y, z;\ \varepsilon x, \varepsilon y, -\varepsilon z|$, et ψ_3 la substitution $|x, y, z;\ \varepsilon x, \varepsilon y, -\varepsilon z + y|$, qui correspond à Σ. Dans la première hypothèse, on pourra remplacer le système initial par un autre, arithmétiquement équivalent, $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, de telle sorte que l'invariant de $xf_0 + yf_1 + zf_2$ soit identiquement égal à la forme $2\psi_2$: le problème est alors de rechercher si ce système admet en lui-même une transformation de degré 1, correspondant à la substitution semblable de $2\psi_2$

$$|x, y, z;\ \varepsilon x, \varepsilon y, -\varepsilon z|,$$

c'est-à-dire (n° **93**) changeant f_0, f_1, f_2, après suppression du dénominateur, en εf_0, εf_1, $-\varepsilon f_2$. Dans la seconde hypothèse, le problème se pose d'une manière analogue.

Les formules de la première Partie donnent le moyen de le résoudre ; on aura soin de ramener d'abord, pour simplifier, la relation $f_0 = 0$ au type $h^2 - gg' - A = 0$. Les résultats obtenus se résument ainsi :

1° *Pour qu'il y ait des transformations ordinaires* (¹) *d'ordre* $+1$ *n'altérant pas le système proposé, il faut et il suffit que la forme* $\mathcal{F}$ *associée puisse représenter le nombre* 4; *il y aura autant de ces transformations qu'il y a de représentations propres de* 4 *par la forme, les représentations* x, y, z *et* $-x$, $-y$, $-z$ *n'étant pas regardées comme distinctes;*

2° *Il* peut *exister des transformations ordinaires d'ordre* -1 *n'altérant pas le système; il faut et il suffit pour cela que les coefficients du système vérifient certaines conditions.*

Ces conditions sont, dans tous les cas, qu'une certaine forme quadratique binaire, dont les coefficients sont fonctions de ceux du système, puisse représenter $+1$; elles ne dépendent pas uniquement de

(¹) Autres que la transformation unité.

la classe à laquelle appartient la forme $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que, vérifiées pour un système, elles ne le sont pas nécessairement pour un autre donnant naissance à une forme équivalente à celle qui est associée au premier.

96. *Points modulaires d'un système.* — Comme dans la deuxième Partie (I, n° **36**), faisons correspondre à un système de périodes abéliennes le point de l'espace qui a pour coordonnées les trois invariants de la forme binaire du sixième ordre dont dérivent les fonctions abéliennes possédant ces périodes. Appelons-le *point modulaire*. Un système de trois relations singulières, définissant *deux* systèmes de périodes g, h, g' et G, H, G', donnera dès lors *deux* points modulaires.

Ces deux points seront généralement distincts : pour qu'ils soient confondus, il faut et il suffit qu'on puisse passer de g, h, g' à G, H, G' par une transformation ordinaire de degré 1. Or G, H, G' sont respectivement imaginaires conjugués de g, h, g'; d'autre part, une transformation d'ordre n change les périodes g, h, g' en d'autres, $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}'$, telles que les parties imaginaires de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ aient le même signe que celles de g et g' multipliées par n; il en résulte qu'une transformation de degré 1 faisant passer de g, h, g' à G, H, G' sera nécessairement *d'ordre* -1.

Ainsi, pour que les deux points modulaires d'un système de trois relations singulières soient confondus, il faut et il suffit que ce système admette en lui-même une transformation ordinaire d'ordre -1.

Remarque I. — Si le système admet en lui-même une transformation ordinaire d'ordre $+1$, celle-ci n'altère pas g, h, g' et G, H, G'; c'est donc une *multiplication complexe* du premier degré.

Or nous avons établi [1] qu'un système de périodes ne peut admettre une telle multiplication que si la surface de Kummer correspondante est un tétraédroïde, en excluant le cas des périodes dérivées du radical $\sqrt{x^5+1}$. Le cas exclu ne correspondant pas à un système de trois relations singulières, on voit qu'un tel système, $f_0 = f_1 = f_2 = 0$, n'aura de transformations d'ordre $+1$ en lui-même que si la surface de

[1] Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 370.

Kummer correspondant aux périodes g, h, g' (ou G, H, G') est un tétraédroïde : il faut et il suffit pour cela qu'il existe entre g, h, g' (ou G, H, G') une relation singulière d'invariant 4, c'est-à-dire qu'une relation $xf_0 + yf_1 + zf_2 = 0$ ait l'invariant 4, ou encore que la forme associée au système puisse représenter $+4$. Ce résultat concorde avec ce qui a été dit plus haut (n° **95**).

Remarque II. — Soient toujours g, h, g' et G, H, G' les deux systèmes de périodes, *imaginaires conjugués*, que donne un système S de trois relations singulières; supposons que g ait sa partie imaginaire positive, celle de G sera négative. Désignons par m et M les points modulaires qui correspondent respectivement à g, h, g' et G, H, G' : ils sont imaginaires conjugués.

Si deux systèmes ont un point modulaire commun, leurs seconds points modulaires coïncident également; les deux systèmes sont dès lors réductibles l'un à l'autre par une transformation ordinaire du premier *degré*.

Si le point m d'un des systèmes coïncide avec le point m de l'autre, la transformation est *d'ordre* $+1$; car, d'après Hermite, une transformation d'ordre k change ou ne change pas le signe de la partie imaginaire de g selon que k est >0 ou <0. Si, au contraire, un point m coïncide avec un point M, la transformation est *d'ordre* -1.

Réciproquement, lorsque deux systèmes S_1 et S_2 sont réductibles l'un à l'autre par une transformation d'ordre $+1$, les points m_1 et m_2, M_1 et M_2 coïncident; si la transformation est d'ordre -1, m_1 et M_2, m_2 et M_1 coïncident.

Équivalence de deux systèmes de trois relations singulières.

97. On dira que deux systèmes de trois relations singulières sont *équivalents* s'ils peuvent être ramenés l'un à l'autre par une transformation ordinaire du premier degré.

D'après le n° **82**, les formes ternaires associées à deux systèmes équivalents sont équivalentes; mais cette condition nécessaire est loin d'être suffisante, comme elle l'était généralement dans le cas des systèmes de deux relations singulières et des formes binaires associées.

Pour étudier la question de l'équivalence des systèmes, considérons deux systèmes S_0 et S'_0, donnant respectivement naissance à deux formes $2\psi_0$ et $2\psi'_0$, *équivalentes entre elles.* Soit Ω le plus grand commun diviseur des coefficients de la forme adjointe à ψ_0; c'est aussi celui des coefficients de la forme adjointe à ψ'_0 : désignons ces adjointes par $\Omega\psi_1$ et $\Omega\psi'_1$; l'invariant Ω est impair, et ψ_1, ψ'_1 sont proprement primitives, puisque ψ_0 et ψ'_0 le sont improprement. Enfin, le discriminant commun de ψ_0 et ψ'_0 est un nombre pair, divisible, comme on sait, par Ω^2, et que nous représenterons par $\Omega^2\Delta$.

Cela posé, observons que ψ_1 et ψ'_1, formes proprement primitives équivalentes, peuvent représenter une infinité de nombres premiers : soit P l'un d'eux, que nous avons le droit de supposer impair et premier à $\Omega\Delta$. En vertu de la théorie classique de Gauss, les formes ψ_0 et ψ'_0 représenteront proprement une même forme quadratique binaire φ, *improprement primitive,* de discriminant ΩP; on pourra toujours choisir P de manière que φ n'appartienne pas à une classe ambiguë. Si donc on pose

$$(1) \qquad \varphi = 2(Dx^2 + qxy + py^2),$$

on aura

$$4pD - q^2 = \Omega P,$$

et q sera un nombre impair.

Désignons maintenant par $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, les trois relations singulières du système S_0; par définition $2\psi_0(x, y, z)$ est l'invariant de la relation $xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0$. Or, on obtient la forme binaire $\varphi(X, Y)$, représentable proprement par ψ_0, en remplaçant, dans $\psi_0(x, y, z)$ les variables x, y, z par $\lambda X + \mu Y$, $\lambda' X + \mu' Y$, $\lambda'' X + \mu'' Y$; c'est-à-dire que $2\varphi(X, Y)$ est l'invariant de la relation singulière

$$(2) \qquad X(\lambda F_0 + \lambda' F_1 + \lambda'' F_2) + Y(\mu F_0 + \mu' F_1 + \mu'' F_2) = 0.$$

On peut remplacer le système $F_0 = F_1 = F_2 = 0$ par le système arith-

métiquement équivalent

$$(3)\qquad \begin{cases} \lambda F_0 + \lambda' F_1 + \lambda'' F_2 = 0, \\ \mu F_0 + \mu' F_1 + \mu'' F_2 = 0, \\ \nu F_0 + \nu' F_1 + \nu'' F_2 = 0; \end{cases}$$

ν, ν', ν'' étant des entiers choisis de telle sorte que le déterminant $(\lambda\mu'\nu'')$ soit $+1$: ce choix est possible : car, la représentation de φ par ψ étant propre, les mineurs $(\lambda\mu' - \mu\lambda')$, ..., sont premiers entre eux.

Considérons maintenant le système formé par les *deux* premières équations (3); d'après ce qui précède, il est propre et sa forme associée est 2φ : la forme φ étant improprement primitive, il résulte de la seconde Partie de ce Mémoire (I, n° **30**) qu'on pourra, par une transformation ordinaire de degré *un*, ramener le système des deux premières relations (1) au type

$$(4)\qquad h^2 - gg' - D = 0, \qquad g - pg' - q = 0,$$

D, p, q étant les coefficients de la forme φ, donnée par (1). Cette transformation changera la troisième équation (3) en une relation singulière : en ajoutant à celle-ci les deux relations (4), mutipliées par des facteurs convenables, on fera disparaître les termes en $h^2 - gg'$ et en g; le système initial, S_0, sera ainsi ramené, par des opérations qui n'altèrent pas la classe de formes ternaires associée, au type *propre :*

$$(5)\qquad \begin{cases} h^2 - gg' - D = 0, \\ g - pg' - q = 0, \\ 2\beta h - \gamma g' - \delta = 0. \end{cases}$$

De même, le système S'_0 pourra être ramené au type *propre :*

$$(6)\qquad \begin{cases} h^2 - gg' - D = 0, \\ g - pg' - q = 0, \\ 2\beta' h - \gamma' g' - \delta' = 0; \end{cases}$$

où les deux premières équations sont les mêmes que dans (5), puisque ψ'_0 représente aussi φ.

Les formes associées aux systèmes (5) et (6), respectivement équivalentes à $2\psi_0$ et $2\psi'_0$, sont équivalentes entre elles; ce sont les formes 2ψ et $2\psi'$ définies par

$$(7)\quad \begin{cases} \psi = 2Dx^2 + 2qxy + 2py^2 + 2\beta^2 z^2 + 2\delta zx + 2\gamma zy, \\ \psi' = 2Dx^2 + 2qxy + 2py^2 + 2\beta'^2 z^2 + 2\delta' zx + 2\gamma' zy. \end{cases}$$

Ω est le plus grand commun diviseur des coefficients de l'adjointe de ψ (ou de ψ'), et l'on a, pour le discriminant, $\Omega^2\Delta$, de ψ (ou de ψ'),

$$(8)\qquad \Omega^2\Delta = 2q\gamma\delta - 2D\gamma^2 - 2p\delta^2 + 2\beta^2(4pD - q^2).$$

La question est maintenant de chercher les conditions d'équivalence des systèmes (5) et (6); nous aurons besoin pour cela de connaître les substitutions qui transforment l'une dans l'autre les formes équivalentes ψ et ψ' : *nous admettrons d'abord que les formes de la classe à laquelle appartiennent les formes initiales* ψ_0, ψ'_0, *et par suite* ψ et ψ', *n'ont pas d'autres substitutions semblables que les substitutions* $(+1)$ *et* (-1).

98. Les discriminants de ψ et de ψ' étant les mêmes, on a, d'après (8), en observant que $4pD - q^2$ est égal à ΩP,

$$D\gamma^2 - q\gamma\delta + p\delta^2 \equiv D\gamma'^2 - q\gamma'\delta' + p\delta'^2 \qquad (\bmod P),$$

d'où l'on tire, en multipliant les deux membres par $4D$,

$$(2D\gamma - q\delta)^2 \equiv (2D\gamma' - q\delta')^2 \qquad (\bmod P),$$

et, puisque P est premier,

$$(9)\qquad \begin{cases} \varepsilon(2D\gamma - q\delta) \equiv 2D\gamma' - q\delta' \qquad (\bmod P) \\ \qquad (\varepsilon = \pm 1). \end{cases}$$

Multiplions les deux membres par q; il vient, puisque $q^2 \equiv 4pD \bmod P$,

et que P est impair,

$$(10) \qquad D\varepsilon(q\gamma - 2p\delta) \equiv D(q\gamma' - 2p\delta') \qquad (\mathrm{mod}\, P).$$

Or, on a le droit de supposer D premier à P : dans le cas contraire, il suffirait d'effectuer une substitution convenable dans la forme φ, c'est-à-dire $2(Dx^2 + qxy + py^2)$, *qui est primitive,* et l'on ramènerait ainsi le coefficient de x^2 à n'être plus divisible par P. On a dès lors, par (9) et (10),

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(2D\gamma - q\delta) \equiv 2D\gamma' - q\delta' \\ \varepsilon(2p\delta - q\gamma) \equiv 2p\delta' - q\gamma' \end{array} \right. \qquad (\mathrm{mod}\, P).$$

D'ailleurs $2D\gamma - q\delta$ et $2p\delta - q\gamma$ sont deux des coefficients de la forme adjointe à ψ; les premiers membres, et de même les seconds, dans (11), sont donc divisibles par Ω; et, puisque Ω est premier à P (n° **97**), on peut écrire les équations (11) :

$$\begin{aligned} 2D(\gamma' - \varepsilon\gamma) - q(\delta' - \varepsilon\delta) &= \sigma\Omega P = \sigma(4pD - q^2), \\ -q(\gamma' - \varepsilon\gamma) + 2p(\delta' - \varepsilon\delta) &= \tau(4pD - q^2), \end{aligned}$$

σ et τ étant des entiers. On en tire

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \gamma' = \varepsilon\gamma + 2p\sigma + q\tau, \\ \delta' = \varepsilon\delta + q\sigma + 2D\tau. \end{array} \right.$$

Si maintenant dans ψ', à savoir

$$2(DX^2 + qXY + pY^2 + \beta'^2 Z^2 + \delta' ZX + \gamma' ZY),$$

on fait la substitution linéaire de déterminant 1 :

$$(13) \qquad X = \varepsilon x - \tau z, \qquad Y = \varepsilon y - \sigma z, \qquad Z = z,$$

ψ' devient, après substitution aux coefficients γ' et δ' de leurs valeurs (12),

$$(14) \qquad 2(Dx^2 + qxy + py^2 + \theta z^2 + \delta zx + \gamma zy).$$

Or, c'est là précisément la forme ψ, au coefficient près de z^2 : mais ce coefficient, θ, doit être égal au coefficient correspondant, β^2, dans ψ, puisque les discriminants de ψ et de la forme (14), équivalente à ψ', sont égaux.

Ainsi $\psi'(X, Y, Z)$ se transforme en $\psi(x, y, z)$ par la substitution (13); comme ψ, par hypothèse, n'a pas de transformations linéaires en elle-même autres que εx, εy, εz, la substitution (13), jointe à la substitution analogue où l'on aurait changé les signes des trois seconds membres, est la seule qui change $\psi'(X, Y, Z)$ en $\psi(x, y, z)$.

Remarque. — Il résulte également de cette analyse que deux formes improprement primitives, ψ et ψ', de même discriminant et de même invariant Ω, sont équivalentes lorsqu'elles représentent proprement une même forme binaire, φ, improprement primitive, et de discriminant ΩP, P étant un nombre premier impair et premier à Ω.

99. Revenons maintenant à notre problème, c'est-à-dire à la recherche des conditions d'équivalence des systèmes propres (5) et (6).

Pour qu'ils soient équivalents, il faut et il suffit qu'il existe une transformation ordinaire de degré *un*, changeant le système (5) en un système arithmétiquement équivalent au système (6); d'une manière plus précise, si l'on désigne par f_0, f_1, f_2 et f_0, f_1, f'_2 les premiers membres des relations (5) et (6), une transformation du premier degré devra changer respectivement f_0, f_1, f_2 (après suppression des dénominateurs) en

$$\lambda f_0 + \mu f_1 + \nu f'_2, \quad \lambda' f_0 + \mu' f_1 + \nu' f'_2, \quad \lambda'' f_0 + \mu'' f_1 + \nu'' f_2,$$

les λ, μ, ν étant des entiers de déterminant ± 1. S'il en est ainsi, la relation $x f_0 + y f_1 + z f_2 = 0$ est changée en

$$x(\lambda f_0 + \mu f_1 + \nu f'_2) + y(\lambda' f_0 + \ldots) + z(\lambda'' f_0 + \ldots) = 0,$$

et dès lors les invariants de ces deux relations sont égaux, quels que soient x, y, z : sous une autre forme, si, dans la forme $2\psi'(X, Y, Z)$,

associée au système (6), on pose

$$(15)\qquad \begin{cases} X = \lambda x + \lambda' y + \lambda'' z, \\ Y = \mu x + \mu' y + \mu'' z, \\ Z = \nu x + \nu' y + \nu'' z, \end{cases}$$

cette forme devient la forme $2\psi(x, y, z)$, associée au système (5).

Mais nous avons déterminé plus haut (n° **98**) les substitutions linéaires, de déterminant ± 1, qui transforment ψ' en ψ : elles se réduisent à la substitution (13), et à celle qu'on obtient en y changeant tous les signes; la substitution (15) est donc l'une de ces deux, et l'on déduit de là, pour λ, λ', μ, μ', ν, ν', ν'', les valeurs

$$\lambda = \mu' = \varepsilon, \qquad \lambda' = \mu = \nu = \nu' = 0, \qquad \nu'' = \varepsilon';$$

ε et ε' représentant ± 1.

Donc, si les systèmes (5) et (6) sont équivalents, la transformation de degré *un* correspondante change respectivement f_0, f_1, f_2 en εf_0, εf_1, $\lambda'' f_0 + \mu'' f_1 + \varepsilon' f'_2$. Or, nous avons déterminé (I, n^{os} **45-47**) toutes les transformations ordinaires de degré un qui reproduisent respectivement (aux signes près) deux relations singulières telles que $f_0 = 0$, $f_1 = 0$; leurs entiers caractéristiques sont définis par le Tableau

$$(16)\qquad \begin{cases} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \\ b_0 = -\varepsilon p a_1 + \varepsilon q a_2, & b_1 = -\varepsilon a_0 - \varepsilon q a_3 \\ b_2 = -\varepsilon p a_3, & b_3 = -\varepsilon a_2 \\ c_0 = -\varepsilon D a_2, & c_1 = \varepsilon D a_3 \\ c_2 = -\varepsilon a_0, & c_3 = \varepsilon a_1 \\ d_0 = \varepsilon D b_2, & d_1 = -\varepsilon b_3 \\ d_2 = \varepsilon b_0, & d_3 = -\varepsilon b_1 \\ & (\varepsilon = \pm 1); \end{cases}$$

les a_i devant uniquement satisfaire à la relation

$$(16\,bis)\quad \begin{cases} a_0^2 - \mathrm{D}a_2^2 - pa_1^2 + p\mathrm{D}a_3^2 + q(a_0a_3 + a_1a_2) = n \quad (^1) \\ (n = \pm 1). \end{cases}$$

A la relation $f_2 = 0$, c'est-à-dire $2\beta h - \gamma g' - \delta = 0$, cette transformation fait correspondre, en vertu des valeurs classiques de g, h, g' en fonction des périodes transformées G, H, G', (I, n° 5), la relation singulière

$$(17)\quad \begin{cases} \mathrm{G}[2\beta(\mathrm{D}a_2a_3 - a_0a_1 - qa_1a_3) - \gamma\varepsilon(\mathrm{D}a_3^2 - a_1^2) \\ \qquad\qquad + \delta\varepsilon(a_0a_3 - a_1a_2 + qa_3^2)] \\ + 2\mathrm{H}[-\beta n + 2\beta(a_0^2 + qa_0a_3 + p\mathrm{D}a_3^2) \\ \qquad - \gamma\varepsilon(a_0a_1 + \mathrm{D}a_2a_3) \\ \qquad\qquad + \delta\varepsilon(a_0a_2 + qa_2a_3 - pa_1a_3)] \\ + \mathrm{G}'[2\beta(qa_0a_2 - pa_0a_1 + p\mathrm{D}a_2a_3) \\ \qquad + \gamma\varepsilon(a_0^2 - \mathrm{D}a_2^2) + \delta\varepsilon(pa_0a_3 + qa_2^2 - pa_1a_2)] \\ + (\mathrm{H}^2 - \mathrm{G}\mathrm{G}')[2\beta(a_0a_2 + pa_1a_3) - \gamma\varepsilon(a_0a_3 + a_1a_2) \\ \qquad\qquad + \delta\varepsilon(a_2^2 - pa_3^2)] \\ + 2\beta\mathrm{D}(a_0a_2 + pa_1a_3) - \gamma\mathrm{D}\varepsilon(a_0a_3 + a_1a_2) \\ \qquad\qquad + \delta\varepsilon(a_0^2 - pa_1^2 + qa_0a_3 + qa_1a_2) = 0. \end{cases}$$

Pour que les systèmes (5) et (6) soient équivalents, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que le premier membre de cette relation (17) soit de la forme

$$\lambda''(\mathrm{H}^2 - \mathrm{G}\mathrm{G}' - \mathrm{D}) + \mu''(\mathrm{G} - p\mathrm{G}' - q) + \nu''(2\beta'\mathrm{H} - \gamma'\mathrm{G}' - \delta'),$$

ν'' étant ε' c'est-à-dire ± 1; ou encore, qu'en remplaçant dans ce premier membre $\mathrm{H}^2 - \mathrm{G}\mathrm{G}'$ par D et G par $p\mathrm{G}' + q$, le résultat soit identiquement égal à $\pm(2\beta'\mathrm{H} - \gamma'\mathrm{G}' - \delta')$. On obtient ainsi, pour

---

(1) En vertu de la première Partie (I, n° 8), la transformation ainsi définie change respectivement f_0 et f_1 en $-\varepsilon n f_0$ et $-\varepsilon n f_1$. La quantité n est l'*ordre* de la transformation ($n = \pm 1$).

les valeurs de β', γ', δ' en fonction de β, γ, δ, les formules

$$\begin{aligned}
\varepsilon'\beta' = &- \beta n + 2\beta(a_0^2 + qa_0a_3 + p\mathrm{D}a_3^2) \\
&- \gamma\varepsilon(a_0a_1 + \mathrm{D}a_2a_3) + \delta\varepsilon(a_0a_2 + qa_2a_3 - pa_1a_3), \\
\varepsilon'\gamma' = &\quad 2\beta(2pa_0a_1 - 2p\mathrm{D}a_2a_3 + pqa_1a_3 - qa_0a_2) \\
&- \gamma\varepsilon(a_0^2 - \mathrm{D}a_2^2 - p\mathrm{D}a_3^2 + pa_1^2) \\
&+ \delta\varepsilon(2pa_1a_2 - 2pa_0a_3 - qa_2^2 - pqa_3^2), \\
\varepsilon'\delta' = &- 2\beta(qa_0a_1 + q^2a_1a_3 - q\mathrm{D}a_2a_3 - 2\mathrm{D}a_0a_2 - 2p\mathrm{D}a_1a_3) \\
&+ \gamma\varepsilon(2\mathrm{D}a_0a_3 + 2\mathrm{D}a_1a_2 + q\mathrm{D}a_3^2 - qa_1^2) \\
&- \delta\varepsilon(a_0^2 - pa_1^2 + 2qa_0a_3 + \mathrm{D}a_2^2 + q^2a_3^2 - p\mathrm{D}a_3^2),
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire, en remplaçant n par sa valeur (16 *bis*),

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
2\varepsilon'\beta' = &\ 2\beta(a_0^2 + \mathrm{D}a_2^2 + pa_1^2 + p\mathrm{D}a_3^2 + qa_0a_3 - qa_1a_2) \\
&- \gamma\varepsilon(2a_0a_1 + 2\mathrm{D}a_2a_3) \\
&- \delta\varepsilon(-2a_0a_2 - 2qa_2a_3 + 2pa_1a_3), \\
\varepsilon'\gamma' = &\ 2\beta(2pa_0a_1 - 2p\mathrm{D}a_2a_3 + pqa_1a_3 - qa_0a_2) \\
&- \gamma\varepsilon(a_0^2 - \mathrm{D}a_2^2 - p\mathrm{D}a_3^2 + pa_1^2) \\
&- \delta\varepsilon(2pa_0a_3 + qa_2^2 + pqa_3^2 - 2pa_1a_2), \\
\varepsilon'\delta' = &\ 2\beta(qa_0a_1 + q^2a_1a_3 - q\mathrm{D}a_2a_3 - 2\mathrm{D}a_0a_2 - 2p\mathrm{D}a_1a_3) \\
&- \gamma\varepsilon(qa_1^2 - 2\mathrm{D}a_0a_3 - 2\mathrm{D}a_1a_2 - q\mathrm{D}a_3^2) \\
&- \delta\varepsilon(a_0^2 - pa_1^2 + \mathrm{D}a_2^2 + 2qa_0a_3 + q^2a_3^2 - p\mathrm{D}a_3^2).
\end{aligned}\right.$$

Ainsi, pour que les deux systèmes (5) et (6) soient équivalents, il faut et il suffit que $2\beta'$, γ', δ' aient les expressions précédentes (18) en 2β, γ, δ : dans ces formules, ε et ε' désignent ± 1, et a_0, a_1, a_2, a_3 sont des entiers, assujettis uniquement à satisfaire à la relation (16 *bis*), à savoir

$$(19)\quad a_0^2 - \mathrm{D}a_2^2 - pa_1^2 + p\mathrm{D}a_3^2 + q(a_0a_3 + a_1a_2) = n \qquad (n = \pm 1).$$

Si l'on pose $2\beta = \mathrm{Z}$, $\gamma = \mathrm{X}$, $\delta = \mathrm{Y}$, on reconnaît, dans ces formules, celles qui donnent *des* transformations en elle-même de la forme ter-

naire indéfinie [1] Φ :

$$(20)\quad \Phi(X, Y, Z) = (4pD - q^2)Z^2 - 4DX^2 + 4qXY - 4pY^2,$$

qui, si l'on y remplace X, Y, Z par γ, δ, 2β, devient le double du discriminant (8), $\Omega^2\Delta$, de la forme ternaire ψ. La forme Φ est l'adjointe de la forme Φ_1 :

$$\Phi_1 = 2(Z^2 - DX^2 - qXY - pY^2),$$

qui, divisée par 2, a joué un rôle fondamental dans la seconde Partie de ce Mémoire.

D'ailleurs les formules (18) et (19) ne donnent pas *toutes* les transformations linéaires en elle-même de la forme (20) [2].

Remarque. — Nous dirons que deux systèmes de trois relations singulières sont *proprement* ou *improprement équivalents* selon qu'on passe de l'un à l'autre par une transformation d'ordre $+1$ ou d'ordre -1.

D'après cela, les systèmes (5) et (6) sont proprement équivalents si $2\beta'$, γ', δ' ont, en fonction de 2β, γ, δ, les expressions (18), les a_i étant des entiers liés uniquement par l'équation (19), où l'on fait $n = 1$; l'équivalence est impropre si l'équation (19) est satisfaite pour $n = -1$.

100. *Résumé.* — Reprenons l'équation (8), qui donne le discriminant, $\Omega^2\Delta$, de ψ, en l'écrivant

$$(21)\qquad (4pD - q^2)\overline{2\beta}^2 - 4D\gamma^2 + 4q\gamma\delta - 4p\delta^2 = 2\Omega^2\Delta,$$

---

[1] Φ est indéfinie : car D, p et $4pD - q^2$ sont positifs, puisque la forme φ, $2Dx^2 + 2qxy + 2py^2$ est positive.

[2] Il est intéressant de comparer ces formules à celles obtenues (I, n° 66, p. 121) pour les transformations en elle-même de la forme $z^2 - Dx^2 - 2q'xy - py^2$, qui, si l'on pose $q = 2q'$, est $\frac{1}{2}\Phi_1$: les transformations actuelles sont les *transposées* des anciennes. Cela n'a rien d'inattendu, car on sait que, si une substitution linéaire n'altère pas une forme ternaire, sa transposée n'altère pas la forme adjointe.

et regardons-y 2β, γ, δ comme des inconnues. Nous dirons que deux solutions entières, 2β, γ, δ et $2\beta'$, γ', δ' sont proprement équivalentes si l'une se déduit de l'autre par les relations (18) et (19), où $n = 1$; elles seront improprement équivalentes si l'une se déduit de l'autre par (18) et (19), où $n = -1$.

Considérons maintenant les deux systèmes (5) et (6), à savoir

$$(5)\quad h^2 - gg' - D = 0, \quad g - pg' - q = 0, \quad 2\beta h - \gamma g' - \delta = 0,$$
$$(6)\quad h^2 - gg' - D = 0, \quad g - pg' - q = 0, \quad 2\beta' h - \gamma' g' - \delta' = 0,$$

qu'on suppose donner naissance à deux formes ternaires équivalentes, 2ψ et $2\psi'$. Soit $\Omega^2\Delta$ le discriminant de ψ et de ψ'; pour que les deux systèmes soient proprement (ou improprement) équivalents, il faut et il suffit que 2β, γ, δ et $2\beta'$, γ', δ', qui sont des solutions de l'équation (21), en vertu même de l'expression du discriminant de ψ et de ψ', soient deux solutions proprement (ou improprement) équivalentes.

Ce résultat suppose que les formes ψ et ψ' n'ont pas d'autres transformations en elles-mêmes que les substitutions $+1$ et -1 : on reviendra plus loin (n° **105**) sur le cas laissé ici de côté.

Systèmes non équivalents qui donnent naissance à une même classe de formes.

101. Soit ψ_0 une forme ternaire, improprement primitive, positive, et telle que $2\psi_0$ soit une forme $\mathcal{F}$; désignons par Ω et Δ ses deux invariants dont le premier est impair : son discriminant sera $\Omega^2\Delta$. Proposons-nous de déterminer tous les systèmes propres de trois relations singulières non équivalents, c'est-à-dire non réductibles l'un à l'autre par une transformation ordinaire de degré un, qui donnent naissance à des formes ternaires équivalentes à $2\psi_0$.

Choisissons pour cela, comme au n° **97**, une forme φ, improprement primitive, n'appartenant pas à une classe ambiguë, représentable proprement par ψ_0, et dont le discriminant, nécessairement divisible par Ω, soit de la forme ΩP, P étant premier (impair), et premier à $\Omega\Delta$; soit

$$\varphi = 2Dx^2 + 2qxy + 2py^2;$$

on a

$$\Omega P = 4pD - q^2,$$

et q est impair, puisque Ω l'est; de plus, on a le droit de supposer D et q premiers à ΩP.

En vertu de la théorie générale du n° **97**, tout système propre donnant naissance à une forme équivalente à $2\psi_0$ sera réductible, par une transformation de degré *un*, au type

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} h^2 - gg' - D &= 0,\\ g - pg' - q &= 0,\\ 2\beta_1 h - \gamma_1 g' - \delta_1 &= 0;\end{aligned}\right.$$

et le problème est maintenant de former tous les systèmes (22) non équivalents qui donnent naissance à une forme équivalente à $2\psi_0$.

Or, la forme associée au système (22) représente évidemment, d'une manière propre, la forme 2φ, puisque sa moitié est

$$(23)\qquad 2Dx^2 + 2qxy + 2py^2 + 2\beta_1^2 z^2 + 2\delta_1 zx + 2\gamma_1 zy;$$

dès lors, en vertu de la remarque du n° **98**, pour qu'elle soit équivalente à ψ_0, il faut et il suffit que la forme (23) ait les mêmes invariants, Ω et Δ, que la forme ψ_0.

Exprimons d'abord que le discriminant est le même, $\Omega^2\Delta$; il vient

$$(24)\qquad (4pD - q^2)\overline{2\beta_1}^2 - 4D\gamma_1^2 + 4q\gamma_1\delta_1 - 4p\delta_1^2 = 2\Omega^2\Delta,$$

c'est-à-dire que $2\beta_1$, γ_1, δ_1 doivent être des solutions (en nombres entiers) de l'équation (21). Parmi ces solutions en nombre infini, nous ne garderons que celles qui ne sont pas équivalentes entre elles, dans le sens du n° **100**, car les systèmes (22) qui répondent à deux solutions équivalentes sont équivalents, et *réciproquement*.

Il faut ensuite que la forme (23) admette l'invariant Ω, c'est-à-dire que Ω soit le plus grand commun diviseur des quantités [coefficients de la forme adjointe à (23)],

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &4pD - q^2, \quad 2D\gamma_1 - q\delta_1, \quad 2p\delta_1 - q\gamma_1,\\ &4p\beta_1^2 - \gamma_1^2, \quad 4D\beta_1^2 - \delta_1^2, \quad 2q\beta_1^2 - \gamma_1\delta_1,\end{aligned}\right.$$

La première de ces quantités étant ΩP, et P ne pouvant les diviser toutes, puisqu'il est premier à $\Omega\Delta$, il suffit que Ω divise les quantités (25). Or, on déduit de (24),

$$4D\gamma_1^2 - 4q\gamma_1\delta_1 + 4p\delta_1^2 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\Omega),$$

d'où

$$(2D\gamma_1 - q\delta_1)^2 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\Omega),$$

(puisque $4pD - q^2 = \Omega P$).

Ainsi, pour toute solution de (24), le carré de la quantité

$$2D\gamma_1 - q\delta_1$$

est divisible par Ω : cette quantité elle-même ne l'est pas nécessairement. On devra donc choisir, parmi les solutions de (24), celles qui rendent $2D\gamma_1 - q\delta_1$ multiple de Ω : je dis qu'alors toutes les autres quantités (25) sont aussi multiples de Ω.

Car, 2D étant premier à ΩP, on a, puisque $2D\gamma_1 \equiv q\delta_1$ $(\mathrm{mod}\,\Omega)$,

$$2D(2p\delta_1 - q\gamma_1) \equiv 4pD\delta_1 - q^2\delta_1 = \delta_1\Omega P \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\Omega);$$

d'où

$$2p\delta_1 - q\gamma_1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\Omega).$$

De même, l'équation (24) s'écrivant

$$2\Omega P\beta_1^2 - 2D\gamma_1^2 + 2q\gamma_1\delta_1 - 2p\delta_1^2 = \Omega^2\Delta,$$

on en tire

$$4D\Omega P\beta_1^2 - (2D\gamma_1 - q\delta_1)^2 - \Omega P\delta_1^2 = 2D\Omega^2\Delta;$$

d'où

$$(4D\beta_1^2 - \delta_1^2)P \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\Omega),$$

et dès lors

$$4D\beta_1^2 - \delta_1^2 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\Omega).$$

On voit de même que $4p\beta_1^2 - \gamma_1^2 \equiv 0$ $(\mathrm{mod}\,\Omega)$; enfin on a

$$2D(2q\beta_1^2 - \gamma_1\delta_1) \equiv q\delta_1^2 - 2D\gamma_1\delta_1 \equiv \delta_1(q\delta_1 - 2D\gamma_1) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\Omega),$$

ce qui montre que la dernière des quantités (25) est aussi un multiple de Ω.

102. Voici donc le résultat.

Soit $2\psi_0$ *une forme* $\mathcal{F}$, *sans autres substitutions semblables que les substitutions* $(+1)$ *et* (-1); *désignons par* Ω *et* Δ *les invariants de* ψ_0, *et choisissons d'une manière quelconque, parmi les formes binaires improprement primitives représentables proprement par* ψ_0, *une forme* φ, *n'appartenant pas à une classe ambiguë, et de déterminant* ΩP, P *étant premier, et premier à* $2\Omega\Delta$; *soit*

$$\varphi = 2Dx^2 + 2qxy + 2py^2 \qquad (q \text{ impair}). \tag{26}$$

Tous les systèmes de trois relations singulières non équivalents qui donnent naissance à des formes ternaires équivalentes à $2\psi_0$ *sont fournis par les formules*

$$\left\{\begin{aligned} h^2 - gg' - D &= 0, \\ g - pg' - q &= 0, \\ 2\beta h - \gamma g' - \delta &= 0, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

où l'on prend successivement pour 2β, γ, δ *toutes les solutions* (¹) *entières non équivalentes* (n° **100**) *de l'équation*

$$(4pD - q^2)\overline{2\beta}^2 - 4D\gamma^2 + 4q\gamma\delta - 4p\delta^2 = 2\Omega^2\Delta, \tag{28}$$

avec la condition supplémentaire que la quantité $2D\gamma - q\delta$, *dont le carré est nécessairement divisible par* Ω, *soit elle-même un multiple de* Ω.

Il est clair que la condition supplémentaire est satisfaite d'elle-même lorsque les facteurs premiers qui figurent dans Ω n'y entrent qu'à la première puissance.

(¹) C'est-à-dire un ensemble quelconque de solutions dont on peut déduire toutes les autres par les formules (18) et (19).

103. *Nombre des systèmes.* — Si donc N_0 est le nombre des solutions non équivalentes, en 2β, γ, δ de l'équation (28), avec la condition que $2D\gamma - q\delta \equiv 0 \pmod{\Omega}$ (et nous verrons plus loin que ce nombre est fini) nous pouvons dire qu'à une classe de formes $\mathfrak{F}$, du type 2ψ, sans autres substitutions semblables que $(+1)$ et (-1), correspondent N_0 systèmes de trois relations singulières, irréductibles l'un à l'autre par des transformations ordinaires du premier degré.

104. *Nombre des points modulaires.* — A ces N_0 systèmes correspondent, *en général*, $2N_0$ points modulaires : nous disons en général, parce que les deux points modulaires liés à un ou plusieurs des N_0 systèmes peuvent coïncider (n° **96**).

Voici comment on peut déterminer exactement le *nombre des points modulaires liés à une classe de formes* $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire le nombre total des points modulaires fournis par les systèmes de trois relations singulières qui donnent naissance à une forme de la classe.

Considérons, parmi les solutions en 2β, γ, δ de l'équation (28), un ensemble quelconque de solutions qui ne soient pas équivalentes *proprement* deux à deux, et dont toutes les autres puissent se déduire par les formules (18) et (19), le nombre n étant supposé égal à $+1$ dans cette dernière (19). Parmi ces solutions, ne gardons que celles qui vérifient la condition supplémentaire indiquée plus haut : soit N leur nombre.

Nous obtenons ainsi, par les formules (27), N systèmes, $S_1, S_2, \ldots, S_N$, de trois relations singulières, non *proprement* équivalents deux à deux, et tels que tout système du type (27), donnant naissance à une forme de la classe considérée, soit proprement équivalent à l'un d'eux.

Il résulte de là que les points modulaires liés à cette classe figurent *tous* parmi les points modulaires que donnent les systèmes S_i, et réciproquement : le problème est donc de rechercher combien de points modulaires *distincts* donnent les S_i.

Or chaque S_i fournit deux groupes de périodes g, h, g' et G, H, G', imaginaires conjugués; supposons la partie imaginaire de g positive, celle de G est négative : à ces deux groupes correspondent respectivement deux points modulaires, m_i et M_i. Nous allons démontrer : 1° que les m_i (et les M_i) sont distincts; 2° que les M_i coïncident avec

les m_j; il en résultera que le nombre cherché des points modulaires est N.

1° Les points m_i (et M_i) sont distincts : car, si m_i et m_j coïncidaient, les systèmes S_i et S_j seraient équivalents (n° **96**), et l'équivalence serait *propre* (*ibid.*), résultat contraire à ce qui a été dit plus haut.

2° Opérons sur les systèmes S_i une même transformation d'ordre -1, n'altérant pas (au même signe près) les deux premières relations (27), communes à tous ces systèmes [1] : nous obtenons ainsi des systèmes S'_i, dont chacun, par ce qui précède, est proprement équivalent à un système S_j (j pouvant être égal à i), puisque la forme associée appartient toujours à la même classe. Donc, le point M_i, que donne un système S_i *quelconque*, coïncide avec un point m_j (qui peut d'ailleurs être m_i, si S_i admet en lui-même une transformation d'ordre -1).

C. Q. F. D.

Donc enfin, le nombre des points modulaires liés à une même classe de formes $\mathcal{F}$, du type 2ψ, est égal au nombre N défini tout à l'heure : on suppose toujours que ces formes n'ont pas d'autres substitutions semblables que $(+1)$ et (-1).

Cas où les formes $\mathcal{F}$ admettent des substitutions semblables.

105. En ce cas, les N systèmes S_i peuvent être deux à deux proprement équivalents; le problème est donc de rechercher s'ils le sont effectivement. Chacun de ces systèmes est du type

$$(S) \quad h^2 - gg' - D = 0, \qquad g - pg' - q = 0, \qquad 2\beta h - \gamma g' - \delta = 0,$$

---

[1] Il existe de telles transformations, c'est-à-dire que l'équation (19), où $n = -1$, a des solutions.

Si l'on y pose en effet $a_1 = 2a'_1$, $a_3 = 2a'_3$, elle s'écrit

$$(a_0 + qa'_3)^2 + F(a'_1, a_2, a'_3) = -1,$$

en désignant par F l'adjointe de la forme $z^2 - Dx^2 - 2qxy - 4py^2$. Or cette forme a pour discriminant $4pD - q^2$, *quantité impaire;* son invariant Ω est évidemment l'unité; dès lors, en vertu d'un résultat de M. Bachmann (*Zahlentheorie,* 4e Partie, p. 256), l'équation $p^2 + F(q, q', q'') = -1$ est résoluble en nombres entiers. *Voir* aussi Meyer, *Crelle,* t. 116, p. 322.

les deux premières relations étant les mêmes pour tous; d'après le mode même de formation des S_i, *aucun d'eux ne peut être réduit à un autre par une transformation ordinaire d'ordre* $+1$, *n'altérant pas, au même signe près, les deux premières équations* (S) : mais, lorsque la classe de formes liée à ces systèmes admet d'autres substitutions semblables que $(+1)$ et (-1), il peut exister d'*autres* transformations du premier ordre réduisant un des systèmes à un autre.

Soient alors $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ les trois équations (S) du système S_i; 2ψ la forme associée. Pour qu'une transformation T, d'ordre $+1$, change S_i en un système S'_i, dont les deux premières équations soient les mêmes que celles de S_i, il faut et il suffit, les λ, μ, ν désignant des constantes, que T change

$$\lambda f_0 + \mu f_1 + \nu f_2 \quad \text{en} \quad f_0,$$
$$\lambda' f_0 + \mu' f_1 + \nu' f_2 \quad \text{en} \quad f_1.$$

S'il en est ainsi, le système S'_i, transformé de S_i par T, sera l'un des systèmes $S_1, S_2, \ldots, S_N$, ou pourra être réduit à l'un d'eux par une transformation d'ordre $+1$: cela résulte des propriétés mêmes des systèmes S_i (n° **104**).

Or, pour qu'il existe une transformation T, d'ordre $+1$, changeant respectivement $\lambda f_0 + \mu f_1 + \nu f_2$ et $\lambda' f_0 + \mu' f_1 + \nu' f_2$ en f_0 et f_1, il faut et il suffit, d'après les résultats de la deuxième Partie de ce Mémoire, que les invariants des deux relations singulières

$$x(\lambda f_0 + \mu f_1 + \nu f_2) + y(\lambda' f_0 + \mu' f_1 + \nu' f_2) = 0$$

et

$$x f_0 + y f_1 = 0$$

soient les mêmes quels que soient x et y [1], c'est-à-dire que l'on ait

$$(29) \qquad \psi(\lambda x + \lambda' y, \mu x + \mu' y, \nu x + \nu' y) = 2Dx^2 + 2qxy + 2py^2.$$

[1] En d'autres termes, les formes binaires associées aux deux systèmes de deux relations doivent coïncider : les deux systèmes sont alors réductibles l'un à l'autre par une transformation de degré *un*, comme on l'a vu dans la deuxième

Donc, les quantités $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ sont les coefficients d'une représentation propre quelconque de la forme φ (ou $2Dx^2 - 2qxy + 2py^2$), par la forme ψ.

Soit alors $f'_2 = 0$ la troisième équation du système S'_i : $2\psi'$ la forme associée à celui-ci; la transformation T change en $f'_2 = 0$ une relation $\lambda'' f_0 + \mu'' f_1 + \nu'' f_2 = 0$ du système S_i, les λ'', μ'', ν'' étant des entiers : on a dès lors identiquement

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(\lambda x + \lambda' y + \lambda'' z, \mu x + \mu' y + \mu'' z, \nu x + \nu' y + \nu'' z) \\ \quad = \psi'(x, y, z), \end{array} \right.$$

et les termes indépendants de z, dans ψ', sont $2Dx^2 + 2qxy + 2py^2$, puisque les deux premières équations de S'_i sont $f_0 = 0$, $f_1 = 0$.

Mais, d'après le n° **98**, ψ se change en ψ' par une substitution du type $|x, y, z;\ \varepsilon x + \tau z, \varepsilon y + \sigma z, z|$, ε désignant ± 1 et σ, τ des entiers; on a donc

$$(31) \qquad \psi'(x, y, z) = \psi(\varepsilon x + \tau z, \varepsilon y + \sigma z, z),$$

d'où, en compararant (30) et (31),

$$\begin{aligned} &\psi(\lambda x + \lambda' y + \lambda'' z, \mu x + \mu' y + \mu'' z, \nu x + \nu' y + \nu'' z) \\ &\quad = \psi(\varepsilon x + \tau z, \varepsilon y + \sigma z, z). \end{aligned}$$

Si donc on désigne par

$$|x, y, z;\ \ lx + my + nz, l'x + m'y + n'z, l''x + m''y + n''z|$$

une substitution semblable de ψ, on déduit de là, pour les valeurs des $\lambda, \lambda', \ldots, \nu'$ les expressions

$$(32) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \lambda = l\varepsilon, & \mu = l'\varepsilon, & \nu = l''\varepsilon, \\ \lambda' = m\varepsilon, & \mu' = m'\varepsilon, & \nu' = m''\varepsilon. \end{array} \right.$$

Partie, car la forme binaire associée à $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, est $4Dx^2 + 4qxy + 4py^2$, et devient, après division par 2, improprement primitive (I, n° 30). La transformation peut être supposée d'ordre $+1$, car, si elle est d'ordre -1, il suffit de la faire suivre d'une transformation d'ordre -1, n'altérant pas (au même signe près) f_0 et f_1 (*voir* la Note précédente).

Réciproquement, si λ, μ, ..., ν' ont des valeurs de cette forme, l'équation (29) est satisfaite, car l'équation

$$\psi(lx + my + nz, l'x + m'y + n'z, l''x + m''y + n''z) = \psi(x, y, z)$$

donne

$$\psi(lx + my, l'x + m'y, l''x + m''y) = \psi(x, y, 0),$$

ou, par (32),

$$\psi(\lambda x + \lambda' y, \mu x + \mu' y, \nu x + \nu' y) = 2(Dx^2 + qxy + py^2).$$

De cette analyse résulte la proposition suivante :

A toute substitution semblable des formes $\mathfrak{F}$ de la classe considérée correspond, pour chaque système S_i, *une transformation* T *d'ordre* $+1$, *changeant* S_i *en un autre des* N *systèmes; inversement, toute transformation* T *jouissant de cette propriété est associée à une substitution semblable de la classe.*

106. *Remarques.* — 1° A une substitution semblable de la forme ψ, associée à un système S_i, ne correspond ainsi qu'*une* transformation T. Car s'il en existe une seconde T_1, changeant, comme T, $lf_0 + l'f_1 + l''f_2$ et $mf_0 + m'f_1 + m''f_2$ en f_0 et f_1, on peut écrire $T_1 = T\Theta$, Θ étant une transformation d'ordre $+1$, qui n'altère pas (au même signe près) f_0 et f_1 : les deux systèmes S'_i et S''_i en lesquels S_i est transformé par T et T_1 se déduisent donc l'un de l'autre par Θ, c'est-à-dire, en vertu des propriétés des systèmes S_i (n° **104**), qu'ils sont identiques.

2° Les substitutions semblables de ψ sont deux à deux *opposées*, c'est-à-dire que l'une se déduit de l'autre par le changement de signe de tous les coefficients; à deux substitutions opposées correspond, pour chaque système S_i, une même transformation T.

3° A deux substitutions semblables de ψ, distinctes et non opposées, on peut admettre qu'il correspond deux transformations T distinctes; sous une autre forme, il n'existe pas deux substitutions semblables de ψ du type

$$|x, y, z;\ lx + my + nz,\ l'x + m'y + n'z,\ l''x + m''y + n''z|,$$

pour lesquelles l, m, l', m', l'' m'' soient les mêmes. On peut toujours en effet choisir la forme φ, à savoir

$$2Dx^2 + 2qxy + 2py^2,$$

pour que ψ, c'est-à-dire

$$2Dx^2 + 2qxy + 2py^2 + 2\gamma zy + 2\delta zx + 2\beta^2 z^2,$$

n'admette pas deux transformations semblables de cette espèce.

107. *Nombre des points modulaires.* — Admettons d'abord que la classe de formes $\mathcal{F}$ considérée ne puisse représenter 4; d'après le n° **95**, aucun système donnant naissance à une forme de cette classe n'admet de transformation d'ordre $+1$ en lui-même, autre que la transformation unité.

Soit d le nombre des substitutions semblables des formes considérées, deux substitutions opposées étant comptées pour une seule. A ces d substitutions correspondent, pour un système S_i quelconque, d transformations d'ordre $+1$, changeant S_i en des systèmes S_j, S_k, ..., différents entre eux et différents de S_i, en vertu de tout ce qui précède; il en résulte que les N systèmes S_i sont réductibles à $\frac{N}{d}$ d'entre eux; et, par suite, le nombre des points modulaires liés à la classe considérée est $\frac{N}{d}$, d'après le raisonnement du n° **104**.

Si les formes de la classe peuvent représenter proprement 4, de k manières, il y aura (n° **95**) k transformations d'ordre $+1$ changeant en lui-même un quelconque des systèmes qui donnent naissance à l'une d'elles, non compris la transformation unité; donc, les d transformations ci-dessus qui correspondent à un système S_i se groupent $(k+1)$ à $(k+1)$, de manière que les transformations d'un groupe changent S_i en un même système S_k; le nombre des points modulaires cherchés sera donc $\frac{N}{d}(k+1)$.

Représentations géométriques.

108. Reprenons la représentation géométrique indiquée dans la deuxième Partie (I, n° **56**). A un système de périodes (g, h, g') ou

aux fonctions abéliennes possédant ces périodes, faisons correspondre le *point modulaire*, qui a pour coordonnées cartésiennes les trois invariants absolus de la forme binaire du sixième ordre liée aux fonctions considérées : à un nombre entier Δ de l'un des types $4N$ ou $4N+1$ est associée ainsi une *surface*, lieu du point modulaire, lorsque les périodes vérifient une relation singulière d'invariant Δ; à une classe de formes binaires positives, équivalentes à une forme de l'un des types

$$4(ax^2+bxy+cy^2) \quad \text{ou} \quad 4(ax^2+bxy+cy^2)+y^2,$$

est associée de même une *courbe algébrique* ou un système de courbes algébriques, qui sont le lieu du point modulaire lorsque les périodes vérifient un des systèmes propres de deux relations singulières qui donnent naissance à une forme de la classe.

De même, si les périodes vérifient un système de trois relations singulières, nous avons vu (n° **96**) qu'il correspond à ces périodes deux points modulaires, distincts ou confondus; si nous considérons tous les systèmes propres qui donnent naissance à une forme ternaire d'une classe donnée, les points modulaires correspondants forment un *groupe de points* dont nous avons discuté le nombre et que nous regarderons comme associés à la *classe* ternaire considérée.

Ainsi, à une classe de formes $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire de formes ternaires positives pouvant représenter un carré et équivalentes à une forme de l'un des types

$$4f(x,y,z) \quad \text{ou} \quad 4f'(x,y,z)+x^2 \quad (^1),$$

correspond dans l'espace un *groupe de points*.

Rappelons que nous avons appelé *surfaces* ou *courbes hyperabéliennes* les surfaces et courbes algébriques liées aux nombres ou aux formes binaires indiquées plus haut.

109. La représentation géométrique ainsi définie possède d'importantes propriétés.

1° *Si une classe de formes ternaires $\mathfrak{F}$ représente proprement un*

---

(1) On n'oubliera pas (n° 88) que $2f(x,y,z)$ est improprement primitive, et que $4f'+x^2$ l'est proprement.

nombre Δ, *le groupe de points qui correspond à la classe est situé sur la surface qui correspond au nombre, et réciproquement.*

Soit, par exemple, Δ un nombre du type $4N$, représentable proprement par une forme $\mathcal{F}$, du type $4f(x, y, z)$. Considérons un *quelconque* S des systèmes propres de trois relations singulières, $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, qui donnent naissance à une forme équivalente à $4f$; soit $4F$ cette forme, soient m et M les deux points modulaires liés au système S. La forme $4F(x, y, z)$ est, par définition, l'invariant de la relation singulière

$$xf_0 + yf_1 + zf_2 = 0,$$

à laquelle satisfont les deux systèmes de périodes donnés par $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$; dire que Δ est représentable *proprement* par $4F$, c'est dire qu'une relation

$$xf_0 + yf_1 + zf_2 = 0,$$

où x, y, z sont *premiers entre eux,* a pour invariant Δ. Or, le lieu des points modulaires donnés par des périodes qui vérifient une relation singulière quelconque d'invariant Δ étant la surface hyperabélienne qui répond à Δ, les points m et M sont nécessairement sur cette surface.

Réciproquement, si m et M sont sur la surface hyperabélienne d'invariant Δ, c'est que les deux systèmes de périodes, g, h, g' et G, H, G', donnés par $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, vérifient une relation singulière d'invariant Δ. Or il est clair que toute relation singulière vérifiée par g, h, g' ou G, H, G' est du type

$$xf_0 + yf_1 + zf_2 = 0,$$

x, y, z désignant des entiers premiers entre eux; l'invariant de cette relation étant, par définition, $4F(x, y, z)$, il en résulte bien que Δ est représentable proprement par $4F$.

La même démonstration s'appliquant à *tous* les systèmes de trois relations singulières qui donnent naissance à une forme de la classe considérée, la proposition est établie.

2° *Si une classe de formes ternaires $\mathfrak{F}$ représente proprement une forme binaire positive d'une classe donnée, réductible* [1] *à l'un des types $4\varphi(x, y)$ ou $4\varphi(x, y) + y^2$, le groupe de points qui correspond à la classe ternaire est situé sur la courbe algébrique (ou sur le système de courbes algébriques) qui correspond à la classe binaire, et réciproquement.*

Supposons, par exemple, que la forme $4F(x, y, z)$ considérée plus haut représente *proprement* la forme binaire $4\varphi(x, y)$, c'est-à-dire que l'on ait identiquement

$$4F(\lambda x + \mu y, \lambda' x + \mu' y, \lambda'' x + \mu'' y) = 4\varphi(x, y),$$

les λ et μ désignant des entiers, tels que les mineurs d'ordre 2 du Tableau

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \end{vmatrix}$$

soient *premiers entre eux*. Sous une autre forme, on peut dire que $4\varphi(x, y)$ est l'invariant de la relation singulière

$$(\lambda x + \mu y) f_0 + (\lambda' x + \mu' y) f_1 + (\lambda'' x + \mu'' y) f_2 = 0,$$

ou encore que le système de deux relations singulières

$$(1) \qquad \lambda f_0 + \lambda' f_1 + \lambda'' f_2 = 0 \qquad \mu f_0 + \mu' f_1 + \mu'' f_2 = 0$$

donne naissance à la forme $4\varphi(x, y)$: ce système est d'ailleurs propre, en vertu de l'hypothèse faite sur $\lambda, \mu, \ldots, \mu''$. Il résulte de là que les deux points modulaires, m et M, liés au système $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, sont situés sur la courbe hyperabélienne qui répond au système (1), c'est-à-dire sur *l'une des courbes* hyperabéliennes associées à la classe binaire 4φ.

La réciproque s'établit de même sans difficulté.

---

[1] Par une substitution linéaire de déterminant ± 1.

110. Corollaire. — *Les systèmes de trois relations singulières qui donnent naissance à des formes $\mathfrak{F}$ d'une classe déterminée sont toujours réductibles à un nombre fini d'entre eux par des transformations ordinaires de degré* 1; *ou, si l'on veut, le nombre des points modulaires liés à une classe* donnée *de formes $\mathfrak{F}$ est fini.*

Ces points, étant en effet communs à toutes les courbes hyperabéliennes associées aux formes binaires représentables proprement par la classe ternaire considérée, sont nécessairement en nombre fini, puisque les courbes hyperabéliennes qui répondent à deux classes binaires différentes n'ont évidemment pas de partie commune.

111. *Intersection de trois surfaces hyperabéliennes.* — Si m est un point commun à trois surfaces hyperabéliennes, d'invariants Δ, Δ_1, Δ_2, les périodes des fonctions abéliennes dont m est le point modulaire vérifient trois relations singulières, d'invariants respectivement égaux à Δ, Δ_1, Δ_2. Deux cas sont à distinguer selon que ces trois relations sont distinctes, ou se réduisent à deux [1].

Si les trois relations sont distinctes, le système *propre* qu'on obtient en les combinant linéairement d'une manière convenable donne naissance à une forme $\mathfrak{F}$ représentant proprement Δ, Δ_1 et Δ_2 : le point m est donc un des points du groupe lié à la classe de cette forme. Réciproquement, quand une classe de formes $\mathfrak{F}$ représente proprement Δ, Δ_1, Δ_2, *tous* les points du groupe correspondant sont sur les surfaces hyperabéliennes d'invariants Δ, Δ_1, Δ_2.

Si les trois relations se réduisent aux deux relations singulières $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, formant un système propre, ce système donne naissance à une forme binaire représentant proprement Δ, Δ_1, Δ_2 : le point m est donc sur la courbe hyperabélienne (ou sur l'une des courbes) associée à la classe de cette forme binaire. Réciproquement, si une classe de formes binaires positives représente proprement Δ, Δ_1, Δ_2, les courbes hyperabéliennes associées sont toutes sur les surfaces d'invariants Δ, Δ_1, Δ_2.

---

[1] Elles ne peuvent évidemment se réduire à une seule, puisque Δ, Δ_1, Δ_2 sont distincts.

Donc :

En dehors d'une intersection fixe [1], *les trois surfaces hyperabéliennes d'invariants* Δ, Δ_1, Δ_2 *se coupent :*

1° *Suivant toutes les courbes hyperabéliennes associées aux classes de formes binaires positives, réductibles à l'un des types*

$$4(ax^2+bxy+cy^2), \quad 4(ax^2+bxy+cy^2)+y^2,$$

qui peuvent représenter proprement chacun des trois nombres Δ, Δ_1, Δ_2;

2° *En tous les points des groupes liés aux classes de formes ternaires* $\mathfrak{F}$ *qui représentent proprement chacun des trois mêmes nombres.*

Bien entendu, si Δ, Δ_1, Δ_2 sont pris au hasard, les trois surfaces n'ont pas de courbe hyperabélienne commune.

112. *Intersection de deux courbes hyperabéliennes.* — Démontrons d'abord la proposition suivante :

Si deux formes binaires positives représentent proprement un même nombre, les courbes (ou systèmes de courbes) hyperabéliennes qui leur sont respectivement associées se coupent dans l'espace, et réciproquement.

Supposons que les formes binaires φ et φ' représentent proprement Δ; soient $f_0=0$, $f_1=0$ et $f'_0=0$, $f'_1=0$ deux *quelconques* des systèmes de deux relations singulières qui donnent respectivement naissance à des formes équivalentes à φ et φ'. En vertu de l'hypothèse, une relation $xf_0+yf_1=0$ et une relation $x'f'_0+y'f'_1=0$ ont même invariant Δ, en désignant par x, y (et par x', y') des nombres premiers entre eux : ces deux relations sont donc réductibles l'une à l'autre par une transformation ordinaire du premier ordre. En d'autres termes, on peut remplacer les deux systèmes considérés par deux systèmes

[1] Deuxième Partie (I, n° 41).

équivalents *qui ont une relation commune*, et sont, par suite, du type

$$(2) \qquad F_0 = 0, \qquad F_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad F_0 = 0, \qquad F'_1 = 0.$$

Les deux points modulaires donnés par le système de trois relations singulières $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F'_1 = 0$ sont dès lors situés sur les courbes hyperabéliennes associées respectivement aux deux systèmes (2), c'est-à-dire que celles-ci se coupent dans l'espace, comme il s'agissait de l'établir.

La réciproque se démontre d'une manière toute semblable.

Observons que, d'après la démonstration précédente, si φ et φ' représentent proprement un même nombre, *chacune* des courbes hyperabéliennes associées à la classe φ coupe *chacune* des courbes associées à la classe φ'.

Enfin, si nous remarquons que la forme $\mathcal{F}$ liée au système $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F'_1 = 0$ représente proprement la forme φ, puisque celle-ci est équivalente à l'invariant de l'expression $xF_0 + yF_1$, et qu'elle représente de même φ', nous en déduisons aisément que :

Deux systèmes de courbes hyperabéliennes, associées respectivement à deux classes de formes binaires, ont en commun tous les groupes de points qui sont liés aux classes de formes ternaires $\mathcal{F}$ susceptibles de représenter proprement chacune des deux classes binaires; réciproquement, tout point commun aux systèmes de courbes considérées appartient à l'un de ces groupes.

113. Ces théorèmes, si l'on suppose formées les équations *algébriques* qui donnent les surfaces, courbes, groupes de points associés respectivement à un nombre, à une forme binaire φ [1], à une forme ternaire $\mathcal{F}$, donnent la solution immédiate, et sans aucun tâtonnement, des problèmes suivants :

---

[1] C'est-à-dire une forme binaire positive, équivalente à une forme de l'un des types

$$4(ax^2 + bxy + cy^2), \quad 4(ax^2 + bxy + cy^2) + y^2.$$

Reconnaître si une forme ternaire $\mathfrak{F}$, ou une forme binaire φ, représentent, ou non, un nombre donné.

Il suffira d'examiner si la surface qui répond au nombre contient, ou non, les points ou courbes associés respectivement aux classes $\mathfrak{F}$ et φ données.

Reconnaître si une forme $\mathfrak{F}$ représente, ou non, une forme φ.

Il suffira d'examiner si les points associés à la classe $\mathfrak{F}$ sont, ou non, sur le système des courbes associées à la classe φ.

Reconnaître s'il existe un nombre représentable par deux formes φ.

Il suffira d'examiner si les systèmes de courbes respectivement associées aux deux classes φ sont ou non sécants; le même examen donnera la solution de ce problème :

Reconnaître s'il existe une forme $\mathfrak{F}$ susceptible de représenter deux formes φ.

Toutes les représentations dont il vient d'être parlé sont supposées *propres*.

Ordres de multiplicité.

114. *Ordre de multiplicité d'une courbe hyperabélienne sur une surface hyperabélienne.* — Considérons la surface hyperabélienne, Σ, qui répond au nombre Δ, et soit $f_0 = 0$ une relation singulière, d'invariant Δ, entre g, h, g', *choisie une fois pour toutes* et d'ailleurs arbitrairement. On peut dire qu'à un point de Σ correspondent tous les systèmes de périodes g, h, g', équivalents entre eux, qui vérifient la relation $f_0 = 0$, c'est-à-dire tous les systèmes de périodes réductibles l'un à l'autre par une des transformations ordinaires de degré *un* qui n'altèrent pas cette relation.

Soit maintenant donnée une courbe hyperabélienne C, tracée sur Σ; par cela même, C est associée à un système propre de deux relations singulières donnant naissance à une forme binaire susceptible de repré-

senter proprement le nombre Δ; ce système est dès lors réductible à un système propre analogue *déterminé*, dont la première équation sera $f_0 = 0$. Soit $f_1 = 0$ la seconde. On peut dire qu'à un point de la courbe C correspondent tous les systèmes de périodes g, h, g', équivalents entre eux, qui vérifient simultanément les deux relations $f_0 = 0$, $f_1 = 0$. Nous désignerons par $\varphi(x, y)$ la forme binaire associée au système $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, c'est-à-dire l'invariant de la relation

$$x f_0 + y f_1 = 0;$$

et l'on aura

$$\Delta = \varphi(1, 0).$$

Considérons maintenant un point quelconque, m, de la courbe C, et soit g, h, g' un des systèmes de périodes correspondants; on aura

$$f_0(g, h, g') = 0, \qquad f_1(g, h, g') = 0.$$

Le point m sera multiple d'ordre $n + 1$ *sur la surface* Σ si, à ce point *considéré comme appartenant à* Σ, correspondent $n + 1$ systèmes de périodes

$$g, h, g', \quad g_1, h_1, g'_1, \quad \ldots, \quad g_n, h_n, g'_n,$$

vérifiant tous la relation $f_0 = 0$, et dont aucun ne soit réductible à un autre *par une des transformations ordinaires de degré* un *qui n'altèrent pas cette relation;* naturellement, chacun des n derniers systèmes sera réductible au premier *par une transformation ordinaire de degré* un *convenable*, puisque les $n + 1$ systèmes donnent le même point modulaire.

Soit alors T_i la transformation de degré *un* qui fait passer de g_i, h_i, g'_i à g, h, g'; comme on a

$$f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0,$$

T_i change cette relation en une autre relation singulière

$$f_i(g, h, g') = 0,$$

de même invariant Δ, qui est différente de $f_0(g, h, g') = 0$, car les systèmes g_i, h_i, g'_i et g, h, g' ne sont pas, par hypothèse, réductibles l'un à l'autre par une transformation de degré *un* n'altérant pas f_0 (au signe près). Donc, puisque g, h, g' sont liés uniquement par les relations $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, qui forment un système propre, l'expression $f_i(g, h, g')$ est de la forme

$$\lambda_i f_0 + \mu_i f_1,$$

en désignant par λ_i et μ_i des entiers premiers entre eux, *dont le second n'est pas nul.*

L'invariant de f_i étant Δ, comme on l'a observé plus haut, et celui de $\lambda_i f_0 + \mu_i f_1$ étant $\varphi(\lambda_i, \mu_i)$, en vertu de la définition donnée pour φ, on aura dès lors

$$\Delta = \varphi(\lambda_i, \mu_i).$$

De même, en considérant la transformation de degré *un*, T_j, qui fait passer de g_j, h_j, g'_j à g, h, g', on aurait

$$\Delta = \varphi(\lambda_j, \mu_j).$$

Je dis qu'on ne peut avoir

$$\lambda_j = \varepsilon\lambda_i, \qquad \mu_j = \varepsilon\mu_i \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Car si ces relations avaient lieu, T_i et T_j transformeraient respectivement les relations

$$f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon f_0(g_j, h_j, g'_j) = 0$$

en une même relation

$$\lambda_i f_0(g, h, g') + \mu_i f_1(g, h, g') = 0;$$

par suite, la transformation $T_i T_j^{-1}$, qui fait passer de g_i, h_i, g'_i à g_j, h_j, g'_j, changerait $f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0$ en $\varepsilon f_0(g_j, h_j, g'_j) = 0$, contrairement à l'hypothèse initiale.

Ainsi, pour que le point m, et par suite la courbe C, soit multiple d'ordre $n+1$ sur la surface Σ, il est nécessaire que la forme binaire φ, associée au système de deux relations singulières qui correspond à C, puisse représenter proprement, de $n+1$ manières différentes [1], l'invariant Δ de Σ : les représentations $\Delta = \varphi(\lambda, \mu)$ et $\Delta = \varphi(-\lambda, -\mu)$ ne sont pas regardées comme distinctes.

115. Réciproquement, si cette condition nécessaire est satisfaite, la courbe C sera multiple d'ordre $n+1$ sur Σ.

Reprenons, en effet, le point m de C, auquel correspond un système de périodes, g, h, g', vérifiant le système $f_0 = 0$, $f_1 = 0$. Dire qu'on a une représentation propre $\Delta = \varphi(\lambda_i, \mu_i)$, c'est dire que la relation $\lambda_i f_0(g, h, g') + \mu_i f_1(g, h, g') = 0$ a pour invariant Δ : donc, par une transformation convenable du premier ordre, Θ_i, conduisant des périodes g, h, g' à des périodes g_i, h_i, g'_i, on changera cette relation en $f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0$. En d'autres termes, au point m correspondent ainsi, sur Σ, $n+1$ systèmes de périodes,

$$g,\ h,\ g', \qquad g_1,\ h_1,\ g'_1, \quad \ldots, \quad g_n,\ h_n,\ g'_n,$$

vérifiant tous $f_0 = 0$; et, pour prouver que m est multiple d'ordre $n+1$ sur Σ, il suffira d'établir qu'aucun de ces $n+1$ systèmes n'est réductible à un autre par une des transformations ordinaires de degré *un* qui n'altèrent pas la relation $f_0 = 0$.

Or, si une transformation de degré *un*, τ, conduisait de g_j, h_j, g'_j à g_i, h_i, g'_i, en changeant $f_0(g_j, h_j, g'_j) = 0$ en $\pm f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0$, les transformations Θ_i et $\Theta_j\tau$ conduiraient, toutes deux, des périodes g, h, g' aux périodes g_i, h_i, g'_i, en changeant respectivement

$$\lambda_i f_0(g, h, g') + \mu_i f_1(g, h, g') = 0 \qquad \text{en} \qquad f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0,$$

et

$$\lambda_j f_0(g, h, g') + \mu_j f_1(g, h, g') = 0 \qquad \text{en} \qquad \pm f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0.$$

---

[1] Y compris la représentation donnée par $\Delta = \varphi(1, 0)$.

Par conséquent, la transformation ordinaire de degré *un*, $\Theta_i(\Theta_j\tau)^{-1}$ conduira des périodes g, h, g' aux *mêmes* périodes, g, h, g', et changera

$$\lambda_i f_0 + \mu_i f_1 = 0 \qquad \text{en} \qquad \pm(\lambda_j f_0 + \mu_j f_1) = 0.$$

Or, toute transformation ordinaire de degré *un* conduisant de g, h, g' à g, h, g' est une *multiplication complexe* ordinaire de degré *un*, et nous savons qu'il ne peut exister de telles multiplications, pour des fonctions abéliennes doublement singulières, que si la surface de Kummer correspondante est un tétraédroïde [1]. Sous une autre forme, il faut que g, h, g' vérifient une relation singulière d'invariant 4, c'est-à-dire que la forme binaire $\varphi(x, y)$, associée au système $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, puisse représenter proprement le nombre 4.

116. Dès lors il convient de distinguer deux cas.

Premier cas. — *La forme φ ne peut représenter proprement* 4. — Toute multiplication complexe de degré *un* des fonctions abéliennes attachées aux périodes g, h, g' se réduit à une multiplication ordinaire par ± 1 [2]; par suite, elle ne peut changer $\lambda_i f_0 + \mu_i f_1 = 0$ en $\pm(\lambda_j f_0 + \mu_j f_1) = 0$ que si l'on a $\lambda_j = \varepsilon\lambda_i$, $\mu_j = \varepsilon\mu_i$, ε désigant ± 1. Or, cette conséquence est inadmissible, puisqu'on a supposé *distinctes* les deux représentations propres de Δ données par

$$\Delta = \varphi(\lambda_i, \mu_i) \qquad \text{et} \qquad \Delta = \varphi(\lambda_j, \mu_j).$$

Donc enfin, si la forme φ ne peut représenter proprement le nombre 4, le point m, et par suite la courbe C, sera multiple d'ordre $n + 1$ sur Σ.

Deuxième cas. — *La forme φ peut représenter proprement* 4. — En ce cas, une des relations $\lambda f_0 + \mu f_1 = 0$ a pour invariant 4, et peut,

---

(1) Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 370.

(2) C'est-à-dire que la transformation ordinaire, de degré *un*, correspondante a tous ses entiers caractéristiques nuls, sauf a_0, b_1, c_2, d_3 qui sont égaux entre eux et égaux à ± 1.

par une transformation ordinaire d'ordre *un*, être réduite au type

$$h^2 - gg' - 1 = 0.$$

Le système $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ est dès lors équivalent à un système du type

$$(1) \qquad h^2 - gg' - 1 = 0, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

dont nous désignerons les deux équations respectivement par $F_0 = 0$, $F_1 = 0$. La forme binaire associée, c'est-à-dire l'invariant de

$$XF_0 + YF_1 = 0$$

est

$$(2) \qquad \Phi(X, Y) = 4X^2 + 4\omega XY + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)Y^2;$$

elle admet la substitution semblable $|X, Y; X + \omega Y, -Y|$.

Cela posé, soit g, h, g' un système de périodes vérifiant les deux relations (1); cherchons les multiplications complexes ordinaires de degré *un* correspondantes.

En vertu des formules établies par nous [1], les entiers caractéristiques des transformations cherchées sont définis par les formules

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{ll} a_0 = 0, & b_0 = -\gamma\rho, \\ a_1 = \alpha\rho, & b_1 = 0 + \beta\rho, \\ a_2 = \beta\sigma - \tau, & b_2 = \gamma\sigma, \\ a_3 = \alpha\sigma, & b_3 = \tau, \\ c_0 = -\omega\rho - \tau, & d_0 = \gamma\sigma, \\ c_1 = \alpha\sigma, & d_1 = \omega\rho - \beta\sigma + \tau, \\ c_2 = 0 + \omega\sigma + \beta\rho, & d_2 = -\gamma\rho, \\ c_3 = \alpha\rho, & d_3 = 0 + \omega\sigma, \end{array}\right.$$

---

[1] Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 339-341.

où θ, ρ, σ, τ sont des entiers. Ces entiers, pour que la transformation soit ordinaire, doivent vérifier l'un des deux systèmes de relations [1] :

$$(4)\qquad \begin{cases} 1^\circ & \rho = 2\tau - \beta\sigma = 0, \\ 2^\circ & \sigma = 2\theta + \beta\rho = 0; \end{cases}$$

et, pour que la transformation soit de degré *un*, il faut et il suffit en outre qu'on ait

$$(5)\qquad \theta^2 + \theta(\beta\rho + \omega\sigma) + \alpha\gamma\rho^2 + (\beta\sigma - \tau)(\omega\rho + \tau) - \alpha\gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

Dans la *première hypothèse* (4), $\rho = 2\tau - \beta\sigma = 0$, l'équation (5) devient

$$\theta^2 + \omega\theta\sigma + \tau^2 - \alpha\gamma\sigma^2 = \pm 1,$$

ou, puisque $2\tau = \beta\sigma$,

$$(6)\qquad (2\theta + \omega\sigma)^2 + \sigma^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2) = \pm 4.$$

Comme le discriminant de la forme *positive* (2), à savoir la quantité $4(\beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2)$, est essentiellement positif, l'équation (6) ne peut être vérifiée que si le second membre est $+4$; ses seules solutions possibles sont

$$(7)\qquad \begin{cases} 1^\circ & \begin{cases} \theta = \pm 1, \quad \sigma = 0, \\ \text{quels que soient} \quad \alpha, \beta, \gamma \quad \text{et} \quad \omega, \end{cases} \\ 2^\circ & \begin{cases} \sigma = \pm 1, \quad 2\theta + \omega\sigma = \pm 1, \\ \text{à condition que} \quad \beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2 = 3. \end{cases} \\ 3^\circ & \begin{cases} \sigma = \pm 1, \quad 2\theta + \omega\sigma = 0, \\ \text{à condition que} \quad \beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2 = 4. \end{cases} \end{cases}$$

La deuxième hypothèse exige évidemment que β soit pair et ω impair;

---

[1] *Ibid.*, p. 341.

en ce cas la forme $\Phi(X, Y)$ s'écrit, si l'on pose $\beta = 2\beta'$,

$$\Phi(X, Y) = 2[2X^2 + 2\omega XY + 2(\beta'^2 - \alpha\gamma)Y^2];$$

et la forme *improprement primitive*, $2X^2 + 2\omega XY + 2(\beta'^2 - \alpha\gamma)$, ayant pour discriminant $4\beta'^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2$, c'est-à-dire $+3$, est équivalente à la forme $2x^2 + 2xy + 2y^2$.

La troisième hypothèse exige que β et ω soient pairs; si $\beta = 2\beta'$, $\omega = 2\omega'$, on a

$$\Phi(X, Y) = 4[X^2 + 2\omega' XY + (\beta'^2 - \alpha\gamma)Y^2],$$

et la forme *proprement primitive* $X^2 + 2\omega' XY + (\beta'^2 - \alpha\gamma)Y^2$, ayant pour discriminant $+1$, est équivalente à la forme $x^2 + y^2$ [1].

Laissons de côté ces cas particuliers, qu'il serait aisé de traiter complètement; nous voyons que les seules solutions possibles de (6) sont $\theta = \pm 1$, $\sigma = 0$; d'où, en vertu des premières équations (4), $\rho = 0$, $\tau = 0$. La transformation (3) a alors tous ses entiers caractéristiques nuls, sauf a_0, b_1, c_2, d_3, égaux entre eux et à ± 1 : elle ne donne que la multiplication évidente que possèdent toutes les fonctions abéliennes, à savoir la multiplication ordinaire par ± 1.

Dans la seconde hypothèse (4), $\sigma = 2\theta + \beta\rho = 0$, l'équation (5) devient

$$\rho^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 4\omega\rho\tau + 4\tau^2 = \mp 4,$$

et il est clair qu'on doit prendre $+4$ dans le second membre. Écrivons-la

$$(2\tau + \omega\rho)^2 + \rho^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2) = 4;$$

si nous laissons encore de côté les cas où $\beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2$ serait égal à 1, 3 ou 4, les seules solutions possibles sont $\tau = \pm 1$, $\rho = 0$, d'où par les dernières équations (4), $\sigma = 0$, $\theta = 0$. Les entiers caractéristiques de la transformation correspondante (3) sont alors tous nuls,

---

[1] On pourrait satisfaire autrement à (6) si $\beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2$ était égal à $+1$; en ce cas, la forme (2) serait équivalente à $4X^2 + Y^2$ et pourrait représenter $+1$, ce qui correspond à une dégénérescence (*voir* à ce sujet le n° 120).

sauf

$$a_2 = -\varepsilon, \qquad b_3 = +\varepsilon, \qquad c_0 = -\varepsilon, \qquad d_1 = +\varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1);$$

les relations entre les périodes g, h, g' et les périodes transformées G, H, G′ sont

$$(8) \quad \begin{cases} g = \dfrac{-G}{-(H^2 - GG')}, \\ g' = \dfrac{-G'}{-(H^2 - GG')}, \qquad h^2 - gg' = \dfrac{-1}{-(H^2 - GG')}, \\ h = \dfrac{-H}{-(H^2 - GG')}. \end{cases}$$

Les relations

$$h^2 - gg' - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0$$

deviennent, par ces formules, après qu'on a chassé le dénominateur $-(H^2 - GG')$,

$$H^2 - GG' - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad -\alpha G - \beta H - \gamma G' + \omega(H^2 - GG') = 0.$$

Si l'on tient compte de la première de ces nouvelles équations, les relations (8) donnent bien $g = G$, $h = H$, $g' = G'$, ce qui devait être, puisque la transformation considérée est une multiplication-complexe.

Ainsi, cette transformation change respectivement F_0 et F_1, c'est-à-dire $h^2 - gg' - 1$ et $\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega$, en F_0 et $-F_1 + \omega F_0$; en d'autres termes, elle opère sur F_0 et F_1 la substitution *transposée* de la substitution

$$|X, Y; \quad X + \omega Y, \ -Y|,$$

que nous avons signalée plus haut comme une substitution semblable de la forme binaire $\Phi(X, Y)$.

Cela posé, reprenons les raisonnements et les notations du n° **115**; nous avons à rechercher si nous pouvons passer des périodes g_j, h_j, g'_j aux périodes g_i, h_i, g'_i par une transformation ordinaire de degré *un*, τ, changeant $f_0(g_j, h_j, g'_j) = 0$ en $\pm f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0$. Comme nous

l'avons vu, il faut et il suffit pour cela qu'il existe une transformation ordinaire de degré *un* (multiplication complexe) conduisant des périodes g, h, g' aux *mêmes* périodes g, h, g', et changeant

$$\lambda_i f_0 + \mu_i f_1 = 0 \qquad \text{en} \qquad \pm(\lambda_j f_0 + \mu_j f_1) = 0.$$

Or, on a, en vertu de ce qui précède,

$$f_0 = a F_0 + b F_1,$$
$$f_1 = a' F_0 + b' F_1,$$

a, b, a', b' désignant des entiers, dont le déterminant $ab' - ba'$ est ± 1, puisque le système $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ est propre.

La multiplication complexe déterminée plus haut change F_0 et F_1 respectivement en F_0 et $-F_1 + \omega F_0$; on en conclut sans difficulté qu'elle change $(\lambda_i f_0 + \mu_i f_1)$ en $(\lambda_j f_0 + \mu_j f_1)$, les λ_j et μ_j étant définis en fonction des λ_i et μ_i de la manière suivante. La forme $\varphi(x, y)$, qui est équivalente à $\Phi(X, Y)$, admet une substitution semblable qui correspond à la substitution $|X, Y;\ X + \omega Y,\ -Y|$ de $\Phi(X, Y)$: soit $|x, y;\ cx + dy,\ c'x + d'y|$ cette substitution; on a

$$\lambda_j = c\lambda_i + d\mu_i, \qquad \mu_j = c'\lambda_i + d'\mu_i,$$

et il est clair, d'après cela, que $\varphi(\lambda_j, \mu_j) = \varphi(\lambda_i, \mu_i)$.

Donc, au point de vue de l'ordre de multiplicité de la courbe C sur la surface Σ, on ne devra pas regarder comme distinctes les deux représentations de Δ

$$\Delta = \varphi(\lambda_i, \mu_i) \qquad \text{et} \qquad \Delta = \varphi(\lambda_j, \mu_j)$$

qui se déduisent l'une de l'autre par la substitution semblable de la forme $\varphi(x, y)$ dérivée de la substitution semblable

$$|X, Y;\quad X + \omega Y,\ -Y|$$

de $\Phi(X, Y)$.

117. De toute cette analyse résulte le théorème suivant :

Soit Σ une surface hyperabélienne d'invariant Δ: désignons

par C *une courbe hyperabélienne* (¹) *associée à une classe de formes binaires positives susceptible de représenter proprement* Δ, *et par* $\varphi(x, y)$ *une de ces formes; nous savons* (I, n° **39**) *que la courbe* C *est sur la surface* Σ.

De plus : *si la forme* φ *ne peut représenter proprement* 4, *l'ordre de multiplicité de la courbe* C *sur la surface* Σ *est égal au nombre des représentations propres de* Δ *par* φ; *on ne regarde pas comme distinctes les deux représentations*

$$\Delta = \varphi(x, y) \qquad \text{et} \qquad \Delta = \varphi(-x, -y).$$

Si la forme φ *peut représenter proprement* 4, *et si elle n'est pas équivalente (proprement ou improprement) à l'une des deux formes* $4x^2 + 4y^2$, $4x^2 + 4xy + 4y^2$ (²), *elle admet en elle-même une transformation linéaire* $|x, y;\ cx + dy,\ c'x + d'y|$ *différente de la transformation* $|x, y;\ \varepsilon x, \varepsilon y|$, *où* ε *désigne* ± 1. *L'ordre de multiplicité de* C *sur* Σ *est encore égal au nombre des représentations propres de* Δ *par* φ; *seulement, indépendamment des représentations* x, y *et* $-x, -y$, *on ne regarde pas comme distinctes les représentations* x, y *et* $cx + dy$, $c'x + d'y$.

118. *Ordre de multiplicité d'un groupe de points sur une surface hyperabélienne.* — On démontrerait d'une manière absolument pareille le théorème suivant :

Soit Σ *une surface hyperabélienne d'invariant* Δ; *désignons par* G *le groupe des points modulaires liés à une classe de formes ternaires* $\mathcal{F}$ *susceptible de représenter proprement* Δ, *et par* $\mathcal{F}(x, y, z)$ *une de ces formes : nous savons* (n° **109**) *que les points du groupe* G *sont sur la surface* Σ.

De plus : *si la forme* $\mathcal{F}(x, y, z)$ *ne peut représenter proprement* 4,

---

(¹) C'est-à-dire l'une *quelconque* des courbes hyperabéliennes associées à la classe, lorsque ces courbes sont en nombre supérieur à l'unité; ou, dans le cas contraire, *la* courbe associée à la classe.

(²) La forme φ ne peut alors représenter 4 que d'une manière, les représentations x, y et $-x, -y$ n'étant pas regardées comme distinctes.

l'ordre de multiplicité de chacun des points du groupe G *sur la surface* Σ *est égal au nombre de représentations propres de* Δ *par* $\mathfrak{F}$; *on ne regarde pas comme distinctes les représentations* x, y, z *et* $-x, -y, -z$.

Si la forme $\mathfrak{F}(x, y, z)$ peut représenter proprement 4 (d'une ou de plusieurs manières différentes), la proposition doit être complétée de la même façon qu'au numéro précédent.

119. *Ordre de multiplicité d'un groupe de points sur une courbe hyperabélienne.* — Enfin, on établit de même cette proposition :

Soit C *une courbe hyperabélienne associée à une classe de formes binaires positives non ambiguës,* φ, *et supposée unique* (¹); *désignons par* G *le groupe des points modulaires liés à une classe de formes ternaires* $\mathfrak{F}$ *susceptible de représenter proprement la classe* φ; *nous savons* (n° **109**) *que les points du groupe* G *sont sur la courbe* C.

De plus : *si les formes* $\mathfrak{F}$ *ne peuvent représenter proprement* 4, *l'ordre de multiplicité de chacun des points du groupe* G *sur la courbe* C *est égal au nombre de représentations propres d'une forme* φ *par une forme* $\mathfrak{F}$; *on ne regarde pas comme distinctes deux représentations* $\lambda x + \lambda' y$, $\mu x + \mu' y$, $\nu x + \nu' y$ *et* $-\lambda x - \lambda' y$, $-\mu x - \mu' y$, $-\nu x - \nu' y$.

Si la courbe C associée à la classe φ n'est pas unique, le théorème subsiste et donne l'ordre de multiplicité de chacun des points du groupe G sur *l'ensemble* des courbes C associées à la classe φ.

120. *Remarque générale.* — L'invariant Δ d'une relation singulière ne peut être égal à $+1$ que dans des cas de dégénérescence des fonctions abéliennes correspondantes (ce *Journal*, 5ᵉ série, t. V, p. 248). On reconnaît aisément que la forme binaire du sixième ordre liée à ces fonctions a alors une racine triple. Par suite, la surface hyperabé-

(¹) C'est-à-dire que les systèmes propres de deux relations singulières qui donnent naissance à une forme de la classe φ sont supposés réductibles à un seul d'entre eux par des transformations ordinaires de degré *un*.

lienne d'invariant 1 se réduit à la *courbe fixe*, commune à toutes les surfaces hyperabéliennes (I, n° **41**). De même, cette courbe est la courbe hyperabélienne associée à toute classe de formes φ (n° **113**) susceptible de représenter $+1$, et elle contient les points associés à toute classe $\mathfrak{F}$ pouvant représenter $+1$. Les théorèmes des n^{os} **108-119** ne s'appliquent pas nécessairement à de telles classes φ et $\mathfrak{F}$.

Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants ;

PAR M. EDMOND MAILLET.

Introduction.

Dans trois Communications à l'Académie des Sciences, en 1903, et un Mémoire corrélatif [1], nous avons indiqué une classification des fonctions entières d'ordre infini, non transfini, et de celles d'ordre zéro. Nous commençons ici (§ I) par compléter cette classification pour les fonctions entières d'ordre zéro : si une fonction entière

$$f(x) = \sum_0^\infty a_m x^m$$

renferme une infinité de coefficients tels que $|a_m| = e_k(m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}$ (ρ entier, $\lim \varepsilon = 0$ pour $m = \infty$), les autres ayant un module plus petit que ne l'indique cette égalité, on a, en désignant par M_r le maximum du module de $f(x)$ pour $|x| = r$, et posant

$$E(x, k, \rho) = \sum_0^\infty \frac{x^m}{e_k(m)^{\frac{m}{\rho}}},$$

$M_r \leqq E(r, k, \rho + \varepsilon')$, et, pour une infinité de valeurs de r,

$$M_r \geqq E(r, k, \rho - \varepsilon') \qquad (\varepsilon' \text{ analogue à } \varepsilon).$$

Nous n'avions antérieurement établi ce résultat que pour $k \leqq 1$.

[1] *Comptes rendus*, 1903, 1er semestre, p. 348, 2e semestre, p. 407 et 478. — *Journal de l'École Polytechnique*, 1904 et 1905.

Dès lors cette classification, un théorème de M. Hadamard (auquel il n'est indispensable de se reporter que pour les fonctions d'ordre transfini ou d'indice infini) et une proposition de Liouville sur les fractions rationnelles approchées d'un nombre irrationnel ou transcendant, nous ont permis de préciser des résultats obtenus par nous au sujet de ces derniers nombres et d'en obtenir de nouveaux; nous exposons ces recherches dans le présent Mémoire (§ II et suivants).

Étant donnée une fonction entière $f(x) = \sum_0^\infty u_m = \sum_0^\infty a_m x^m$ quelconque, en s'aidant d'un théorème de M. Hadamard, on peut toujours déterminer une fonction φ_m de m croissant constamment avec m, et telle que $f(x)$ renferme une infinité de coefficients a_m satisfaisant à $\left|\frac{a_m}{a_{m+l}}\right| > \varphi_{m+l}^l$, quel que soit $l > 0$.

Pour les fonctions entières d'ordre non transfini ou d'indice fini, notre classification permet d'arriver directement à cette inégalité en prenant $\varphi_m = (\log_k m)^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1}$ (ε_1 fini aussi petit qu'on veut pour m assez grand), quand $f(x)$ renferme une infinité de coefficients tels que $|a_m|^{-1} = (\log_k m)^{m\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)}$, les autres ayant leurs modules plus petits que ne l'indique cette égalité.

De là, et de quelques lemmes relatifs aux fonctions $e_k(m)$, nous concluons divers résultats sur l'irrationnalité ou la transcendance des nombres $f\left(\frac{1}{q}\right)$ ou $f\left(\frac{p}{q}\right)$ (p, q entiers, a_n rationnel), principalement quand a_n est positif ou que $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ croît constamment et indéfiniment avec n (a_n réel). Ainsi soit $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, et p_n, q_n, $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ entiers; quand l'indice $k \geqq 3$ et $p_n \leqq e_k(n)^{\tau n}$ $\left(\tau < \frac{1}{2\rho}\right)$, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ n'est pas algébrique; pour les deux formes de a_n ci-dessus, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est transcendant $\left(\frac{p}{q} > 0\right)$. Il y a des extensions aux fonctions entières d'ordre quelconque présentant des lacunes.

Nous étudions ensuite les nombres dérivés des fonctions entières ou

quasi-entières de la forme

$$\varphi(x) = F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right) + F_2\left(\frac{1}{x-a_1}\right) + \ldots + F_{\theta+1}\left(\frac{1}{x-a_\theta}\right),$$

($a_1, \ldots, a_\theta$ rationnels), où $F(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_{\theta+1}(x)$ sont de la forme

$$\sum_0^\infty \frac{p_n}{q_n} x^n$$

$\left[k \geqq 3,\ \frac{q_{n+1}}{q_n}\text{ entier},\ q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon'_n\right)n},\ 0 \leqq p_n < e_k(n)^{\varepsilon_n n}\right]$, et aussi les nombres dérivés de la somme, du produit, du quotient (fonctions quasi-méromorphes), plus généralement d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels de fonctions $\varphi(x)$. Ainsi, quand les $a_1, \ldots, a_\theta$ sont tous négatifs, tout polynome à coefficients rationnels positifs de fonctions $\varphi(x)$, s'il ne se réduit pas à une fraction rationnelle en x, prend pour x rationnel positif une valeur transcendante. Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels des fonctions $F(x)$, où x rationnel quelconque, est un nombre, exceptionnellement rationnel, en général transcendant, et qui n'est jamais algébrique. Enfin $F[F_1(x)]$ pour x rationnel > 0 est transcendant si $k \geqq k_1 \geqq 3$ (k_1 indice de F_1).

On obtient des théorèmes analogues, mais souvent bien moins généraux, quand $F(x)$ est d'indice 2 ou 1. Ainsi, soient θ, θ_1, θ_2, θ_3 les quatre fonctions θ de Jacobi (notations du *Cours d'Analyse* lithographié de l'École Polytechnique, de M. Jordan); $\frac{\theta_2(1)}{\theta_3(1)}$, $r^{\frac{1}{4}}\frac{\theta_1(1)}{\theta_3(1)}$, $\frac{\theta_3''(1)}{\theta_3(1)}$, $\frac{\theta_3'''(1)}{\theta_3(1)}$, ... sont des irrationnelles (r entier > 1).

Il y a aussi des extensions aux fonctions non entières, avec lacunes, et dont le rayon de convergence est fini.

En terminant, nous définissons les nombres *quasi-rationnels* et les fractions ordinaires ou continues *quasi-périodiques* qui ont des caractères voisins de ceux des nombres rationnels et des fractions ordinaires ou continues périodiques : une fraction ordinaire ou continue quasi-périodique est un nombre transcendant.

La lecture de notre Mémoire exige seulement la connaissance du *Cours d'Analyse* de l'École Polytechnique, d'un passage d'un Mé-

moire de M. Hadamard indiqué plus loin, de notre Mémoire précité du *Journal de l'École Polytechnique* et de ce qui est nécessaire pour l'intelligence de ce dernier et s'y trouve mentionné.

§ I. — *Sur les fonctions entières d'ordre zéro.*

Considérons la fonction

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^\infty u_m = \sum_0^\infty a_m x^m,$$

dont les coefficients peuvent s'écrire

$$|a_m| = e_k(m)^{-m\tau}.$$

Supposons de plus que, pour une infinité de valeurs de m, dès que $m > \mu$, on puisse écrire

$$(2) \qquad \theta_1 \geqq \tau \geqq \theta \qquad (\theta_1, \theta \text{ donnés fixes}),$$

quel que soit m, la valeur de τ pour les autres étant $> \theta_1$.

Soit τ_1 la valeur de τ correspondant à un de ces coefficients satisfaisant à (2), d'indice m. Considérons, quand m croît, la suite des valeurs τ_1; portons dans un plan où nous prenons deux axes rectangulaires Om, $O\tau_1$, m en abscisse, τ_1 en ordonnée. Nous obtiendrons une suite de points compris entre les droites $\tau_1 = \theta$, $\tau_1 = \theta_1$. Parmi ces points, quand m croît, nous en prendrons un pour lequel τ_1 a une valeur $\tau'_1 \leqq$ celle de tous les précédents (pour $m = m'$); puis nous prendrons $m > m'$, et, quand m croît, le premier de tous ces points pour lequel $\tau_1 = \tau''_1 \leqq \tau'_1$, si la chose est possible, et ainsi de suite. Si ceci peut se poursuivre indéfiniment, $\tau'_1, \tau''_1, \ldots$ vont en décroissant indéfiniment (ou ne croissant pas), tout en restant $\geqq \theta$. Cette suite s_1 de quantités possède une limite η_1, c'est-à-dire que, dès que m est assez grand, $\tau_1^{(i)} = \eta_1 + \varepsilon$ ($\lim \varepsilon = 0$ pour $m = \infty$). Si ceci ne peut se poursuivre indéfiniment pour une certaine valeur m'''_1 de m, $\tau_1 = \tau'''_1$, et les valeurs de τ_1 correspondant à $m > m'''_1$ sont $> \tau'''_1$. On peut raisonner alors comme nous venons de le faire sur les quantités τ_1 correspondant à $m > m'''_1$; ou bien on y trouvera une infinité de nombres τ'_2,

τ_2'', ... possédant une limite η_2 au plus égale à tous les nombres τ_1 quand $m > m_1'''$; ou bien on y trouvera une quantité $\tau_2^{(i_2)}$, analogue à τ_1''', et ainsi de suite. Finalement, en continuant, ou bien on trouvera une suite analogue à s_1, ou bien on aura une suite σ de quantités τ_1''', $\tau_2^{(i_2)}$, ... correspondant à des valeurs m_1''', $m_2^{(i_2)}$, ... de m telles que, pour $m > m_2^{(i_2)}$, par exemple, on ait $\tau_1 > \tau_2^{(i_2)}$. Cette suite σ est formée de quantités croissantes $\leqq \theta_1$; elle doit donc tendre vers une limite η', c'est-à-dire que, dès que m est assez grand, pour une infinité de valeurs de τ_1, $\tau_1 = \eta' - \varepsilon'$ ($\lim \varepsilon' = 0$ pour $m = \infty$).

Par conséquent, ceci s'appliquant aussi bien aux fonctions d'ordre fini ou infini, mais non transfini [1] :

Lemme. — *Soit une fonction entière*

$$f(x) = \sum_0^\infty u_m = \sum_0^\infty a_m x^m, \tag{1}$$

qui possède une infinité de coefficients a_m tels que

$$|a_m| = e_k(m)^{-m\tau}$$

(k *entier positif, nul ou négatif*), *avec*

$$\theta_1 \geqq \tau \geqq \theta \qquad (\theta, \theta_1 \textit{ donnés et fixes}),$$

la valeur de τ pour les autres coefficients étant plus grande que θ_1. Il existe un nombre ρ tel que $\theta_1 \geqq \frac{1}{\rho} \geqq \theta$, et que $f(x)$ renferme une infinité de coefficients a_m satisfaisant à

$$|a_m| = e_k(m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} \tag{3}$$

($\lim \varepsilon = 0$ *pour* $m = \infty$), *les autres ayant une valeur plus petite que ne l'indique cette égalité. Les coefficients satisfaisant à l'égalité* (3) *seront dits* principaux.

---

[1] Si l'on pose $\log_{-k}(m) = e_k(m)$.

Soit $k > 1$. Nous avons vu dans un Mémoire antérieur [1] que l'on avait alors

$$(4) \qquad |f(x)| \leqq r^{(1+\varepsilon_1)\log_k r}$$

($r = |x|$), dès que $r \geqq \xi$, ξ fini, et que, pour une infinité de valeurs de $|x|$, $|f(x)| \geqq r^{(1-\varepsilon_2)\log_k r}$. Mais ce résultat ne fournit aucune indication sur le caractère spécial que donne à $f(x)$ le nombre ρ parmi les fonctions d'ordre zéro satisfaisant aux conditions du lemme précédent.

Il nous suffira, pour ce qui suit, d'établir à cet égard la propriété suivante :

Théorème. — *Soit une fonction entière*

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^\infty a_m x^m,$$

où, pour une infinité de valeurs m_1 de m,

$$|a_{m_1}| = e_k(m_1)^{m_1\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)} \qquad (k > 1),$$

les autres coefficients a_m ayant un module plus petit que ne l'indique cette égalité.

Prenons $|x| = r_1$ [2]

$$\log r_1 = \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right) e_{k-1}(m_1)\left[e_{k-2}(m_1)\ldots e_1(m_1)m_1 + 1\right].$$

On a

$$|f(x)| = (1+\varepsilon')e_k(m_1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)e_{k-2}(m_1)\ldots e_1(m_1)m_1^2}.$$

Pour une valeur quelconque de $|x| = r$ déterminons m_2 par

$$\log r = \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon''\right) e_{k-1}(m_2)\left[e_{k-2}(m_2)\ldots e_1(m_2)m_2 + 1\right]$$

---

[1] *Comptes rendus*, p. 407, prop. V et VI, 17 août 1903, et *Journal de l'École Polytechnique*, 1904 et 1905, p. 43.

[2] Pour $k = 1$, la propriété correspondant à ce théorème est établie dans notre Mémoire précité. Nous supposons donc $k > 1$.

(ε'' *fini, mais aussi petit qu'on veut*); *on a*

$$|f(x)| \leqq (1+\varepsilon''')\, e_k(m_2)^{\left[\frac{1}{\rho}+\varepsilon^{(IV)}\right] e_{k-2}(m_2)\ldots e_1(m_2)\, m_2^2}.$$

En effet, on a, pour $r = |x|$,

$$(5) \qquad |u_m| = \frac{r^m}{e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)m}},$$

$$(6) \qquad \log|u_m| = m \log r - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right) m\, e_{k-1}(m).$$

Pour une valeur de r, m étant entier ou non, l'expression du deuxième membre de (6), où on laisse ε fixe, est maxima (elle comporte évidemment un maximum et non un minimum) quand

$$(7) \qquad \log r - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right) e_{k-1}(m)\,[e_{k-2}(m)\ldots e_1(m)\, m + 1] = 0.$$

Donnons à m une valeur m_1 assez grande, et telle que $|a_m|$ soit coefficient principal, et à ε la valeur correspondante ε_1; la formule ci-dessus nous détermine une valeur r_1 de r. On a

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} \log r_1 &= \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) e_{k-1}(m_1)\,[e_{k-2}(m_1)\ldots m_1 + 1], \\ \log|u_{m_1}| &= \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) e_{k-1}(m_1)\,[e_{k-2}(m_1)\ldots m_1^2 + m_1] \\ &\qquad - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) m_1\, e_{k-1}(m_1), \\ \log|u_{m_1}| &= \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) e_{k-1}(m_1)\, e_{k-2}(m_1)\ldots e_1(m_1)\, m_1^2. \end{aligned}\right.$$

Soit u_{m_1+i} (i positif ou négatif $\neq 0$) un autre terme de la série

$$|u_{m_1+i}| \leqq \frac{r^{m_1+i}}{e_k(m_1+i)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon'\right)(m_1+i)}};$$

dès que $m_1 + i$ est assez grand, $|\varepsilon'| < \varepsilon_2$,

$$\log|u_{m_1+i}| \leqq (m_1+i)\log r - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_2\right)(m_1+i)\, e_{k-1}(m_1+i).$$

Lorsque r a la valeur r_1 [formule (7)],

$$\log\left|\frac{u_{m_1+i}}{u_{m_1}}\right| \leqq (m_1+i)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)e_{k-1}(m_1)[e_{k-2}(m_1)\ldots m_1+1]$$
$$-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2\right)(m_1+i)e_{k-1}(m_1+i)$$
$$-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)e_{k-1}(m_1)e_{k-2}(m_1)\ldots e_1(m_1)m_1^2,$$

$$\frac{\log\left|\frac{u_{m_1+i}}{u_{m_1}}\right|}{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1} \leqq i\,e_{k-1}(m_1)e_{k-2}(m_1)\ldots e_1(m_1)m_1+(m_1+i)e_{k-1}(m_1)$$
$$-(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e_{k-1}(m_1+i)=\mathrm{N}_i$$
$$(\varepsilon_3 \text{ fixe}).$$

Considérons la valeur de N_i *quand i est entier ou non.*

Soit $i>0$:

$$\mathrm{N}_i \leqq e_{k-1}(m_1)\ldots e_1(m_1)m_1\left(i+\frac{i}{m_1}+1\right)$$
$$-(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e_{k-1}(m_1+i).$$

Si $k=2$:

$$\mathrm{N}_i = e^{m_1}m_1\left(i+\frac{i}{m_1}+1\right)-(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e^{m_1+i}$$
$$=e^{m_1}[m_1 i+i+m_1 \quad -(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e^i].$$

Or

$$\mathrm{N}_i+\lambda e^{m_1+i}=e^{m_1}[m_1 i+i+m_1-(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e^i+\lambda e^i].$$

La dérivée de la parenthèse par rapport à i est

$$m_1+1-(1-\varepsilon_3)e^i-(1-\varepsilon_3)(m_1+i)e^i+\lambda e^i<0,$$

dès que $\lambda=0, 1$, $i \geqq \frac{1}{2}$.

La parenthèse est alors au plus égale à

$$\tfrac{3}{2}m_1+\tfrac{1}{2}-(1-\varepsilon_3)(m_1+\tfrac{1}{2})e^{\frac{1}{2}}+\lambda e^{\frac{1}{2}}<0,$$

car $\sqrt{e}>1{,}62$, et

$$\mathrm{N}_i<-0{,}1\,e^{m_1+i}.$$

En général, quand $k > 2$,

$$N_i \leqq e_{k-1}(m_1)^{1+\varepsilon'_3}\left(i + \frac{i}{m_1} + 1\right) - (1 - \varepsilon_3)(m_1 + i)\, e_{k-1}(m_1 + i),$$

où ε'_3 ne dépend que de m_1 ($\lim \varepsilon'_3 = 0$ pour $m_1 = \infty$),

$$e_{k-1}(m_1 + i) \geqq e_{k-1}(m_1)^{1,2} \quad (^1),$$

dès que $i \geqq \frac{1}{2}$ et $k \geqq 3$;

$$N_i + \lambda\, e_{k-1}(m_1 + i) \leqq e_{k-1}(m_1)^{1+\varepsilon'_3}\left(i + \frac{i}{m_1} + 1\right)$$
$$- [1 - \varepsilon_3)(m_1 + i) - \lambda]\, e_{k-1}(m_1 + i) < 0,$$
$$N_i < -\lambda\, e_{k-1}(m_1 + i) \qquad (i \geqq \tfrac{1}{2}).$$

Finalement, quel que soit $k > 1$, pour $i \geqq \frac{1}{2}$,

$$N_i < -0,1\, e_{k-1}(m_1 + i),$$
$$e^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) N_i} = \left|\frac{u_{m_1+i}}{u_{m_1}}\right| < \frac{1}{e^{\lambda'(i+m_1)}},$$

λ' fini positif, quand i au moins égal à $\frac{1}{2}$, entier ou non;

$$\sum_{m_1+1}^{\infty} |u_m| < |u_{m_1}| \frac{1}{e^{\lambda'(m_1+1)}}\left(1 + \frac{1}{e^{\lambda'}} + \frac{1}{e^{2\lambda'}} + \ldots\right)$$
$$< |u_{m_1}| \frac{1}{e^{\lambda'(m_1+1)}\left(1 - \frac{1}{e^{\lambda'}}\right)} = |u_{m_1}| \frac{1}{e^{\lambda' m_1}(e^{\lambda'} - 1)} < |u_{m_1}|\, \varepsilon_4$$

(ε_4 aussi petit qu'on veut quand m_1 assez grand).

Soit maintenant i négatif et $= -i_1$ et $k > 1$.

$$N_i < e_{k-1}(m_1)\,[i\, e_{k-2}(m_1) \ldots m_1 + m_1 + i]$$
$$< e_{k-1}(m_1)(-m_1 i_1 + m_1 - i_1) < -e_{k-1}(m_1) \qquad \text{si} \qquad i_1 \geqq 1;$$
$$\left|\frac{u_{m_1+i}}{u_{m_1}}\right| \leqq e^{-\lambda'' e_{k-1}(m_1)},$$

λ'' fini positif.

---

(1) Il suffit

$$e_{k-2}(m_1 + i) \geqq 1,2\, e_{k-2}(m_1),$$
$$e_{k-3}(m_1 + i) \geqq \log 1,2 + e_{k-2}(m_1),$$

ce qui a lieu.

La somme des modules des m_1 premiers termes (à part un nombre fini) est

$$|u_{m_1}|\,\varepsilon_5,$$

où ε_5 est aussi petit qu'on veut.

Nous avons négligé, dans cette évaluation, la somme des modules d'un nombre fini de termes, somme plus petite que

$$A r_1^{\mu_1} \quad (A,\ \mu_1 \text{ finis}),$$

dont le logarithme est plus petit que $\log A + \mu_1 \log r_1$, terme aussi petit qu'on veut par rapport à $\log|u_{m_1}|$ [formule (8)] quand m_1 assez grand.

Finalement, le module de $|u_{m_1}|$ est aussi grand qu'on veut par rapport à la somme des modules des autres termes.

Nous avons ainsi établi la première moitié de notre théorème :

Il existe une infinité de valeurs entières m_1 de m pour lesquelles le module de $f(x)$ est

$$|f(x)| = (1+\varepsilon'_6)\,|u_{m_1}| = (1+\varepsilon')\,e_k(m_1)^{\left(\frac{1}{p}-\varepsilon_1\right)e_{k-2}(m_1)\ldots e_1(m_1)\,m_1^2},$$

quand

$$|x| = r = e_k(m_1)^{\left(\frac{1}{p}-\varepsilon_1\right)[e_{k-2}(m_1)\ldots e_1(m_1)\,m_1+1]},$$

a_{m_1} étant alors un coefficient principal.

Passons à la seconde moitié.

Au lieu d'opérer en donnant dans (7) à r la valeur qui correspond à $m = m_1$, nous pouvons nous donner, *a priori*, r et considérer la série

$$\sum U_m = \sum \frac{r^m}{e_k(m)^{\frac{m}{p}}};$$

r étant donné, si nous cherchons le maximum de $\dfrac{r^m}{e_k(m)^{\frac{m}{p}}}$, nous sommes conduit à (7), où $\varepsilon = 0$, et nous savons que, si m_2 est la racine corres-

pondante [(7) n'en ayant évidemment qu'une],

$$\log U_m \leqq \frac{1}{\rho} e_{k-1}(m_2)\dots e_1(m_2)m_2^2 = \log V.$$

Pour la même valeur de r, formons

$$\log\left|\frac{U_{m_2+i}}{V}\right| \qquad (m_2 + i \text{ entier}).$$

$$\begin{aligned}\rho\log\left|\frac{U_{m_2+i}}{V}\right| = \quad & (m_2+i)e_{k-1}(m_2)[e_{k-2}(m_2)\dots m_2+1] \\ & -(m_2+i)e_{k-1}(m_2+i) \\ & -e_{k-1}(m_2)\dots e_1(m_2)m_2^2 = N_i' \\ = \quad & i\,e_{k-1}(m_2)\dots e_1(m_2)m_2 \\ & +(m_2+i)e_{k-1}(m_2) - (m_2+i)e_{k-1}(m_2+i).\end{aligned}$$

$m_2 + i$ est entier; si $i = 0$, $U_{m_2+i} = V$; soit $i \neq 0$: quand $|i| \geqq 1$, tous nos raisonnements faits sur N_i s'appliquent à N_i' et l'on est conduit aux mêmes limites supérieures de N_i'; le seul cas où il est douteux que des inégalités de même nature aient lieu est celui où $|i| < 1$, c'est-à-dire celui qui correspond aux termes $U_{E(m_2)}$, $U_{E(m_2)+1}$ en supposant m_2 non entier.

La somme des autres termes de ΣU_m d'après ce qui précède est $\leqq \varepsilon_6 V$. Pour montrer que $\Sigma U_m \leqq (1 + \varepsilon_7)V$, il reste à faire voir que

$$U_{E(m_2)} + U_{E(m_2)+1} \leqq (1 + \varepsilon_8)V.$$

Soient

$$E(m_2) = m_2 - i_1, \qquad E(m_2) + 1 = m_2 + i_2,$$

$$i_2 + i_1 = 1, \qquad i_2 \quad \text{ou} \quad i_1 \geqq \frac{1}{2}.$$

Il s'agit de prouver que, si

$$X_1 = \frac{U_{E(m_2)}}{V}, \qquad X_2 = \frac{U_{E(m_2)+1}}{V},$$

$$X_1 + X_2 \leqq 1 + \varepsilon_8.$$

Quand $k = 2$,

$$N'_i = i\, e^{m_2} m_2 - (m_2 + i) e^{m_2 - i} + (m_2 + i) e^{m_2},$$
$$N'_i e^{-m_2} = i m_2 + m_2 + i - (m_2 + i) e^{i} \leqq i m_2$$
$$+ m_2 + i - (m_2 + i)(1 + i) \leqq - i^2,$$

car $e^i > 1 + i$, i positif ou négatif;

$$N'_i \leqq - i^2 e^{m_2}.$$

Les deux valeurs X_1, X_2 sont au plus égales à

$$e^{-\frac{i_2^2}{\rho} e^{m_2}} = a^{-i_2^2}, \qquad e^{-\frac{i_1^2}{\rho} e^{m_2}} = a^{-i_1^2},$$

où a est aussi grand qu'on veut. Leur somme est

$$S = a^{-i_1^2} + a^{-i_2^2};$$

$|i_1|$ ou $|i_2|$ est $\geqq \frac{1}{2}$, et l'une des quantités $a^{-i_1^2}$ ou $a^{-i_2^2}$ est aussi petite qu'on veut pour m_2 assez grand; par suite, on a bien $S \leqq 1 + \varepsilon_8$.

Quand $k > 2$, on a pour $i_2 \geqq \frac{1}{2}$,

$$\log \left| \frac{U_{m_2 + i_2}}{V} \right| < - m_2,$$

d'après ce qu'on a vu pour N_i.

D'autre part, pour i négatif $= - i_1$,

$$N'_i < e_{k-1}(m_2) [i\, e_{k-2}(m_2) \ldots m_2 + m_2 + i]$$
$$< e_{k-1}(m_2)(- i_1 m_2^2 + m_2 - i_1) < - e_{k-1}(m_2),$$

si

$$|i_1| > \frac{1}{2};$$

par suite, quand $k \geqq 3$, l'un des rapports $\frac{U_{E(m_2)}}{V}$, $\frac{U_{E(m_2)+1}}{V}$ est toujours aussi petit qu'on veut pour m_2 assez grand, et leur somme est bien encore $\leqq 1 + \varepsilon_8$.

Par conséquent, ΣU_m *est bien* $\leqq V(1+\varepsilon_7)$.

Étant donné alors $f(x)$, où $|a_m|^{-1} \geqq e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)m}$, on peut choisir une quantité ε'' finie aussi petite qu'on veut et telle que, à partir d'une certaine valeur de m, $|a_m|^{-1} \geqq e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon''\right)m}$. Le module de $f(x)$ pour $|x| = r$ est $\leqq (1+\varepsilon_1''')\sum \frac{r^m}{e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon''\right)m}}$. Posant $\frac{1}{\rho} - \varepsilon'' = \frac{1}{\rho_1}$, et appliquant à la série du deuxième membre de cette inégalité le résultat obtenu pour ΣU_m, on arrive à la seconde moitié du théorème.

C. Q. F. D.

Remarque. — Il suit de là que le nombre ρ est bien pour la fonction $f(x)$ un nombre caractéristique. Si

$$E(x, k, \rho) = \sum \frac{x^m}{e_k(m)^{\frac{m}{\rho}}},$$

on a, quel que soit $|x| = r$, M_r étant le maximum de $|f(x)|$ pour

$$|x| = r,$$

$$M_r \leqq E(r, k, \rho + \varepsilon), \tag{9}$$

et, pour une infinité de valeurs de r déterminées comme l'indique l'énoncé

$$M_r \geqq E(r, k, \rho - \varepsilon). \tag{10}$$

On pourra dire alors que $f(x)$ *est d'indice* k *et d'ordre* $(0, k, \rho)$ [1].

Les inégalités (9) et (10) sont encore vraies pour $k = 1$ (Mémoire précité, p. 34 et 36).

---

[1] Les extensions aux fonctions quasi-entières et aux fonctions monodromes sont évidentes.

§ II.

Soit

$$f(x) = \sum_0^\infty u_m = \sum_0^\infty a_m x^m$$

une fonction entière quelconque; M. Hadamard a montré [1] que l'on pouvait toujours déterminer une fonction φ_m de m telle que $L\varphi_m + \frac{K}{m}$ (K entier arbitraire), et, *a fortiori*, $L\varphi_m$ ou φ_m fût constamment croissant avec m, dès que m dépasse une certaine limite, et telle encore que

$$(\alpha) \qquad |a_m|^{-1} \geqq \varphi_m^m,$$

l'égalité $|a_m|^{-1} = \varphi_m^m$ ayant lieu pour une infinité de valeurs de m. Soit m_1 une de ces valeurs :

$$\left|\frac{a_{m_1}}{a_{m_1+l}}\right| = \frac{\varphi_{m_1}^{-m_1}}{|a_{m_1+l}|} \geqq \frac{\varphi_{m_1+l}^{m_1+l}}{\varphi_{m_1}^{m_1}} > \varphi_{m_1+l}^{l}.$$

Nous pouvons ainsi énoncer ce théorème, corollaire immédiat du théorème précité de M. Hadamard :

Théorème I. — *Soit*

$$(11) \qquad f(x) = \sum_0^\infty u_m = \sum_0^\infty a_m x^m$$

une fonction entière absolument quelconque : on peut toujours déterminer une fonction φ_m croissant constamment avec m, et telle que (1) *renferme une infinité de coefficients a_m satisfaisant à l'inégalité*

$$(12) \qquad \left|\frac{a_m}{a_{m+l}}\right| > \varphi_{m+l}^{l},$$

quel que soit $l > 0$.

---

[1] *Journal de mathématiques*, 1893.

On peut indiquer une variante de l'inégalité (12) qui peut être utile : nous aurons

$$\varphi_{m+l}^{l} \geqq \varphi_{m+1}\varphi_{m+2}\cdots\varphi_{m+l}.$$

Donc, *a fortiori*, on aura

$$(13) \qquad \left|\frac{a_m}{a_{m+l}}\right| > \varphi_{m+1}\varphi_{m+2}\cdots\varphi_{m+l}$$

pour une infinité de valeurs de m.

Il est évident que ces inégalités (12) et (13) se conserveront pour une fonction ψ_m croissante, mais telle que $\psi_m < \varphi_m$.

Dans le cas des fonctions entières d'ordre non transfini ou d'indice fini, un de nos Mémoires précédents [1] permet une détermination simple et directe d'une pareille fonction ψ_m, sans qu'il soit nécessaire de s'appuyer sur l'inégalité (α) de M. Hadamard.

En effet :

1° *Ordre* > 0 *et non transfini.* — Prenons une fonction d'ordre (k, ρ), en nous bornant au cas où ρ est fini et $\neq 0$; il y a une infinité de coefficients a_m tels que

$$(14) \qquad |a_m| = (\log_k m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} \qquad (\text{où } \varepsilon \text{ dépend de } m),$$

les autres ayant un module plus petit que ne l'indique cette formule.

Prenons ces coefficients a_m; si, pour une infinité d'entre eux,

$$(15) \qquad \left|\frac{a_m}{a_{m+i}}\right| \geqq [\log_k(m+i)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)i},$$

quel que soit i (ε_1 fini, positif, aussi petit qu'on veut dès que m dépasse une certaine limite, mais indépendant de m), on peut prendre dans (12), mais non dans (α),

$$\varphi_n = \psi_n = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1}.$$

Sinon, on a, pour une infinité de valeurs de m, par suite pour une

---

[1] *Comptes rendus*, 1er sem., p. 348; 2e sem. 1903, p. 407 et 478; *Journal de l'École Polytechnique*, 1904.

d'entre elles, des inégalités de la forme

$$(16)\qquad \left|\frac{a_m}{a_{m+i_j}}\right| < [\log_k(m+i_j)]^{\tau i_j},$$

où $\frac{1}{\rho} - \tau$ est fini et positif (τ fixe).

Ceci ne peut avoir lieu pour une infinité de valeurs de i_j, i_1, i_2, ..., sans quoi dans la série

$$\Sigma = |u_m| + |u_{m+i_1}| + |u_{m+i_2}| + \ldots,$$

$$|u_{m+i_j}| > |u_m| \frac{|x|^{i_j}}{[\log_k(m+i_j)]^{\tau i_j}},$$

et

$$\Sigma > |u_m| \left\{1 + \frac{|x|^{i_1}}{[\log_k(m+i_1)]^{\tau i_1}} + \frac{|x|^{i_2}}{[\log_k(m+i_2)]^{\tau i_2}} + \ldots\right\}.$$

Le second membre est une série entière d'ordre $\left(k, \frac{1}{\tau}\right) > (k, \rho)$, alors que Σ est forcément d'ordre $\leqq (k, \rho)$; résultat absurde. Donc l'inégalité (16) n'a lieu que pour un nombre fini de valeurs i_j. Soit i' la plus grande de ces valeurs. On a

$$\left|\frac{a_m}{a_{m+i'}}\right| < [\log_k(m+i')]^{\tau i'},$$

et, quel que soit l,

$$\left|\frac{a_m}{a_{m+i'+l}}\right| \geqq [\log_k(m+i'+l)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)(i'+l)},$$

$$|a_{m+i'+l}| < \frac{|a_{m+i'}|\,[\log_k(m+i')]^{\tau i'}}{[\log_k(m+i'+l)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)(i'+l)}},$$

$$\left|\frac{a_{m+i'}}{a_{m+i'+l}}\right| > [\log_k(m+i'+l)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)l},$$

quel que soit l; en sorte que l'inégalité (15) a lieu pour $a_{m+i'}$: il y a alors une infinité de valeurs de $m+i'$ satisfaisant à cette inégalité, *et l'on peut toujours prendre*

$$\psi_n = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1}.$$

2° *Ordre non nul, indice non infini.* — Les mêmes raisonnements subsistent avec des valeurs négatives de k, grâce à la notation

$$\log_{-k'} x = e_{k'}(x),$$

au théorème du paragraphe I, page 280, et à la remarque de la page 287. C. Q. F. D.

On peut d'ailleurs toujours supposer que $a_{m+i'}$ est *un coefficient principal, c'est-à-dire satisfaisant à* (14). En effet, sinon, soit

$$|a_{m+i'}| = [\log_k(m+i')]^{-\tau_2(m+i')},$$

avec $\tau_2 - \frac{1}{\rho}$ fini et positif. D'après (14) et (16),

$$(\log_k m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} < [\log_k(m+i')]^{\tau i' - \tau_2(m+i')},$$

avec $\tau < \frac{1}{\rho} < \tau_2$, et, *a fortiori*,

$$(\log_k m)^{\left(\tau_2 - \frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)m} < 1,$$

ce qui est absurde.

Nous pouvons ainsi énoncer le corollaire suivant :

Corollaire I. — *Soit*

$$f(x) = \sum_0^\infty u_m = \sum_0^\infty a_m x^m \tag{11}$$

une fonction entière absolument quelconque d'ordre (k, ρ) *non transfini ou d'ordre* $(0, -k, \rho)$ *et d'indice* $-k > 0$ *fini. Il y a une infinité de coefficients* a_m *principaux, c'est-à-dire satisfaisant à*

$$|a_m|^{-1} = (\log_k m)^{m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)},$$

et tels que

$$\left|\frac{a_m}{a_{m+l}}\right| > \log_k(m+l)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)l}, \tag{12 bis}$$

quel que soit $l > 0$ (ε_1 *fini, positif, aussi petit qu'on veut dès que* m *est supérieur à une certaine limite*).

Ceci va nous permettre de déterminer une limite supérieure du module E_m de l'erreur commise quand on s'arrête, dans le calcul de $f(x)$, au terme d'indice m jouissant de la propriété (12) ou (12 *bis*). On a

$$E_m \leqq T_m = |a_{m+1}x^{m+1}| + |a_{m+2}x^{m+2}| + \ldots,$$

$$T_m \leqq |a_m x^m| \left(\left| \frac{a_{m+1}x}{a_m} \right| + \left| \frac{a_{m+2}x^2}{a_m} \right| + \ldots \right),$$

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| < \varphi_{m+1}^{-1}, \qquad \left| \frac{a_{m+2}}{a_m} \right| < \varphi_{m+2}^{-2} < \varphi_{m+1}^{-2}, \qquad \ldots;$$

$$T_m < |a_m x^m| \left(\frac{|x|}{\varphi_{m+1}} + \frac{|x|^2}{\varphi_{m+1}^2} + \ldots \right),$$

$$T_m < |a_m x^m| \frac{|x|}{\varphi_{m+1}} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{\varphi_{m+1}}},$$

et, si $|x| \leqq \xi$, m assez grand par rapport à ξ,

$$E_m \leqq T_m < 2|a_m x_m| \frac{|x|}{\varphi_{m+1}} \quad (^1).$$

Quand m est assez grand, l'erreur a son module aussi petit qu'on veut par rapport à celui du dernier des termes non négligés. Nous obtenons ainsi ce corollaire :

Corollaire II. — *Tout étant posé comme au théorème ci-dessus, et a_m étant un coefficient satisfaisant à* (12), *on a*

$$\left| f(x) - \sum_0^m u_m \right| < |u_m| \frac{|x|}{\varphi_{m+1} - |x|},$$

---

(1) On voit de suite que cette inégalité subsiste quand le premier terme $\neq 0$ après u_m a son indice $> m+1$. Elle est, en effet, remplacée par

$$T_m < 2|a_m x^m| \left| \frac{x}{\varphi_{m+\mu_1}} \right|^{\mu_1},$$

si $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_{m+\mu_1-1} = 0$, $a_{m+\mu_1} \neq 0$, et

$$\left| \frac{x}{\varphi_{m+\mu_1}} \right|^{\mu_1} \leqq \left| \frac{x}{\varphi_{m+1}} \right|^{\mu_1} \leqq \frac{|x|}{\varphi_{m+1}}.$$

et même, si m est assez grand par rapport à $|x|$,

$$\left| f(x) - \sum_0^m u_m \right| < 2|u_m| \frac{|x|}{\varphi_{m+1}}.$$

Prenons une fonction $f(x)$ d'ordre (k, ρ) non transfini ou d'indice fini. D'après le corollaire I, on peut trouver une infinité de coefficients principaux tels que

$$\left| \frac{a_m}{a_{m+l}} \right| > \log_k (m+l)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) l}$$

(k négatif $= -i$ pour les fonctions d'ordre o). Appliquant le raisonnement qui nous a conduit au corollaire II, on conclut :

Corollaire III. — *Tout étant posé comme au corollaire I, on a, pour une infinité de valeurs de m [a_m coefficient principal satisfaisant à (12 bis)]*

$$\left| f(x) - \sum_0^m u_m \right| < 2|u_m| \frac{|x|}{\log_k (m+1)^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1}}.$$

Dans certains cas un peu plus particuliers on peut écrire une inégalité analogue pour toute valeur de m. En effet, supposons que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ soit constamment décroissant, quel que soit n, et tende vers o quand n croît indéfiniment. On aura pour toute valeur de x, et pour m assez grand, $\geqq \mu(x)$, mais quelconque,

$$\begin{aligned} T_m^{(1)} &= |a_{m+2} x^{m+2}| + |a_{m+3} x^{m+3}| + \ldots \\ &\leqq |a_{m+2} x^{m+2}| \left(1 + \left| \frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} x \right| + \ldots \right) \\ &\leqq |a_{m+2} x^{m+2}| (1 + k|x| + k^2 |x|^2 + \ldots), \end{aligned}$$

où

$$\left| \frac{a_{m+i+1}}{a_{m+i}} \right| \leqq k \qquad (i \geqq 2),$$

k étant aussi petit qu'on veut dès que m est assez grand;

$$T_m^{(1)} \leqq |u_{m+2}| \frac{1}{1 - k|x|},$$

$$\begin{aligned} u_{m+1}| - T_m^{(1)} &\leqq |u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots| \\ &\leqq |u_{m+1}| + T_m^{(1)} \leqq |u_{m+1}| \left(1 + \left| \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \right| \frac{|x|}{1 - k|x|}\right). \end{aligned}$$

$\left| f(x) - \sum_0^m u_m \right|$ diffère donc de $|u_{m+1}|$ d'aussi peu qu'on veut, et

$$|u_{m+1}|(1-\varepsilon) \leqq \left| f(x) - \sum_0^m u_m \right| \leqq |u_{m+1}|(1+\varepsilon) \leqq \frac{2|u_m||x|}{\gamma_{m+1}},$$

avec

$$\gamma_{m+1} = \left| \frac{a_m}{a_{m+1}} \right|.$$

Si certains des coefficients a_n étaient nuls, le raisonnement subsisterait à condition de supposer que le rapport

$$\left| \frac{u_{n+\nu}}{u_n} \right| \qquad (a_n \neq 0,\ a_{n+\nu} \neq 0,\ a_{n+1} = \ldots = a_{n+\nu-1} = 0)$$

fût constamment décroissant et tendît vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Dans la dernière inégalité, il faudrait remplacer u_{m+1} par $u_{m+\mu_1}$

$$(a_{m+1} = \ldots = a_{m+\mu_1-1} = 0,\ a_m \neq 0,\ a_{m+\mu_1} \neq 0).$$

Corollaire IV. — *Si $f(x)$ est une fonction entière telle que le module du rapport d'un terme $\neq 0$ au suivant croisse constamment et indéfiniment avec son indice n, pour toute valeur de x donnée, au moins à partir d'une certaine valeur de l'indice, on a, dès que m dépasse une certaine limite,*

$$|u_{m+\mu_1}|(1-\varepsilon) \leqq \left| f(x) - \sum_0^m u_m \right| \leqq |u_{m+\mu_1}|(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers 0 avec $\frac{1}{m}$, $u_{m+\mu_1}$ étant le premier des termes d'indice $> m$ qui soit $\neq 0$.

Nous allons encore établir deux lemmes préliminaires sur les fonctions $e_k(x)$.

A quelles conditions a-t-on

$$e_k(n+1)^{(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} > e_k(n)^{n\tau\alpha}, \qquad \alpha > 1, \qquad \tau \text{ fixe} > \frac{1}{\rho},$$

ou

$$e_k(n+1)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} > e_k(n)^{n\tau\alpha}?$$

Premier cas. — Il faut

$$(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)e_{k-1}(n+1) > n\tau\alpha\, e_{k-1}(n).$$

Pour $k=1$, ceci est impossible; donc $k>1$. De plus

$$\log\left[(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)\right] + e_{k-2}(n+1) > \log n\tau\alpha + e_{k-2}(n).$$

Quand $k=2$, il faut

$$\frac{(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}{n\tau\alpha}e > 1,$$

$$\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)e > \tau\alpha.$$

Si $\tau - \frac{1}{\rho}$ est assez petit, on pourra prendre $\alpha = 1$ ou 2, ou encore $\alpha = 2, 1$ par exemple.

Quand $k \geqq 3$, il faut

$$\left[e^{e_{k-3}(n+1)-e_{k-3}(n)} - 1\right] e^{e_{k-3}(n)} \geqq \log n\tau\alpha - \log(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right),$$

ce qui a toujours lieu pour n assez grand. Donc :

Lemme I. — *Soient τ et ρ deux nombres fixes, avec $\tau - \frac{1}{\rho} > 0$, α un nombre $\geqq 1$ On a :*

1° *Si $\tau - \frac{1}{\rho}$ est assez petit,*

$$e_2(n+1)^{(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} > e_2(n)^{n\tau\alpha},$$

pourvu que $\alpha \leqq 2, 1$;

2° *Pour $k \geqq 3$,*

$$e_k(n+1)^{(n+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} > e_k(n)^{n\tau\alpha},$$

quel que soit α.

Deuxième cas. — Il faut

$$\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right) e_{k-1}(n+1) > n\tau\alpha\, e_{k-1}(n) \qquad (k>1),$$

$$\log\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right) + e_{k-2}(n+1) > \log n\tau\alpha + e_{k-2}(n) \qquad (k>2),$$

$$\left[e^{e_{k-3}(n+1)-e_{k-3}(n)} - 1\right] e^{e_{k-3}(n)} > \log n\tau\alpha - \log\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right),$$

ce qui a lieu, quels que soient τ et α, dès que $k \geqq 3$. Donc :

Lemme II. — *Tout étant posé comme au lemme I, on a pour $k \geqq 3$,*

$$e_k(n+1)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon} > e_k(n)^{n\tau\alpha},$$

quels que soient τ et α, dès que n est assez grand.

§ III. — *Application à la théorie des nombres irrationnels ou transcendants.*

Nous pouvons maintenant passer aux applications de la classification des fonctions entières d'ordre non transfini ou d'indice fini à la théorie des nombres irrationnels ou transcendants.

Nous rappellerons d'abord cette propriété fondamentale, due à J. Liouville [1] :

Propriété I. — *Soit ξ une quantité quelconque positive, $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}, \ldots$ des fractions rationnelles réelles ou imaginaires à dénominateur réel, qui tendent vers la limite ξ quand n croît indéfiniment, et dont les dénominateurs croissent indéfiniment, au moins à partir d'un certain indice. ξ ne peut être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers de degré $\leqq \alpha$, c'est-à-dire ξ ne*

---

[1] *Journal de Liouville* (ou *Journal de Mathématiques*), 1851, p. 137; ou encore Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 27. Paris, Gauthier-Villars, 1898.

peut être une irrationnelle algébrique de degré $\leqq \alpha$ *que si l'on a, dès que n est assez grand,*

$$\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{1}{MQ_n^{\alpha}},$$

M *étant une quantité finie indépendante de n* (¹).

Considérons maintenant une fonction entière $f(x)$ à coefficients *rationnels et réels*. Nous pourrons toujours écrire

$$a_n = \pm \frac{p_n}{q_n},$$

p_n et q_n étant entiers positifs, premiers ou non entre eux, et q_n étant divisible par $q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_0$. *Nous supposerons toutes les fonctions entières à coefficients rationnels que nous considérerons mises sous cette forme.*

Substituons alors à x, dans $f(x)$, une fraction rationnelle réelle $\frac{p}{q}$, et admettons que $f\left(\frac{p}{q}\right)$ soit rationnel et $= \frac{A}{B}$ (A, B entiers premiers entre eux). On aura

$$\frac{A}{B} = \pm \frac{p_0}{q_0} \pm \ldots \pm \frac{p_m}{q_m}\left(\frac{p}{q}\right)^m + R_m = N + R_m,$$

$$A q_m q^m = B q_m q^m \left(\pm \frac{p_0}{q_0} \pm \ldots \pm \frac{p_m}{q_m}\frac{p^m}{q^m}\right) + B R_m q_m q^m.$$

L'expression $|B q_m q^m R_m|$ devra alors être nulle ou égale à un nombre entier $\geqq 1$.

On a $R_m \neq 0$, soit si tous les coefficients a_n sont positifs à partir d'une certaine valeur de n, soit dans le cas des séries du corollaire IV : plaçons-nous dans ces deux cas [(cas A)].

D'après le théorème I et le corollaire II (ou encore les corollaires I

(¹) Si $\xi = \frac{\alpha' + \beta' i}{\gamma'}$, avec α', β', γ' entiers réels, cette inégalité est vraie pour $\alpha = 1$.

à IV), pour une infinité de valeurs de m,

$$|R_m| < 2|u_m| \frac{|x|}{\varphi_{m+1}} = 2\frac{p_m}{q_m}\frac{p^m}{q^m}\frac{p}{q\varphi_{m+1}},$$

$$1 \leqq |BR_m q_m q^m| < 2Bp_m \frac{p^{m+1}}{q\varphi_{m+1}} :$$

p étant donné, il y aura impossibilité dès que

$$\frac{p_m p^{m+1}}{\varphi_{m+1}}$$

décroît indéfiniment avec $\frac{1}{m}$ ($p_m \geqq 1$). Par conséquent :

1° Si $\varphi_m < 2^m$, on ne peut affirmer l'impossibilité que quand $p = 1$, pourvu que p_m soit d'ordre de grandeur $< \varphi_{m+1}$; alors $\varphi_m^{-m} > 2^{-m^2}$: ce sera donc le cas pour toutes les fonctions entières des formes en question, en particulier pour celles d'ordre non transfini ou d'indice fini (corollaire I du théorème I), car on peut prendre pour elles

$$\varphi_m = (\log_k m)^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1},$$

et si $\varphi_m \geqq 2^m$, l'impossibilité a lieu *a fortiori;*

2° Si $s^m < \varphi_m \leqq (s+1)^m$ (s entier), on ne peut affirmer l'impossibilité que quand $p \leqq s$, pourvu que p_m soit d'ordre de grandeur plus petit que celui de $\frac{\varphi_{m+1}}{p^{m+1}}$. Ce sera, en général, le cas des fonctions entières d'une des formes en question et d'ordre $(0, 1, \rho)$: pour ces fonctions, qui sont d'indice 1, on peut prendre (corollaire I) $\varphi_m = e^{m\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right)}$, et s sera déterminé par

$$s = E\left(e^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon}\right)$$

(ε positif, petit), puisque ε_1 tend vers 0 quand m croît indéfiniment.

Si $\frac{1}{\rho}$ est infiniment grand (cas des fonctions d'indice $\geqq 2$), on peut affirmer l'impossibilité quel que soit p, pourvu que p_m soit d'ordre de grandeur plus petit que celui de $\frac{\varphi_{m+1}}{p^{m+1}}$. Prenons

$$\varphi_m = e_k(m)^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1} \qquad (k \geqq 2);$$

il suffira que p_m soit d'ordre plus petit que

$$e_k(m+1)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1} e^{-(m+1)\log p} = e_k(m+1)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1-\sigma},$$

avec

$$e_k(m+1)^{-\sigma} = e^{-(m+1)\log p},$$

$$\sigma e_{k-1}(m+1) = (m+1)\log p, \qquad \sigma = \frac{(m+1)\log p}{e_{k-1}(m+1)}.$$

L'impossibilité sera manifeste si $p_m \leqq e_k(m+1)^{\tau}$, où $\frac{1}{\rho} - \tau > \eta$ (η fini positif), c'est-à-dire que dans ce cas $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est toujours irrationnel.

3° Enfin, si $k \geqq 3$, on peut aller plus loin encore : nous savons déjà que, pour les deux formes de séries considérées, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ n'est pas rationnel, pourvu que $p_m \leqq e_k(m+1)^{\tau}$. Je dis que $f\left(\frac{p}{q}\right)$ ne peut être algébrique, quand $p_m \leqq e_k(m)^{\tau m}$.

Considérons une fonction entière *absolument quelconque* d'indice $k \geqq 3$, pour laquelle $p_m \leqq e_k(m)^{\tau m}$, où τ est fixe et $< \frac{1}{\rho}$. Soit

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \xi = \mathrm{N} + \mathrm{R}_m,$$

où ξ est algébrique, et non rationnel, de degré $\alpha > 1$. On aura forcément $\mathrm{R}_m \neq 0$, puisque N est rationnel et $\xi - \mathrm{N}$ irrationnel. Les signes des coefficients a_i sont donc indifférents, et ceci nous permet néanmoins de prendre pour a_m un coefficient satisfaisant à (12) et d'appliquer le corollaire II, tout en ayant la condition $\mathrm{R}_m \neq 0$.

Ceci posé (propriété I),

$$|\xi - \mathrm{N}| = \left|\xi - \frac{q^m q_m \mathrm{N}}{q^m q_m}\right| \geqq \frac{1}{\mathrm{M}(q^m q_m)^{\alpha}} \qquad (\mathrm{M} \text{ fini}),$$

$$|\mathrm{R}_m| < 2|u_m| \frac{|x|}{\varphi_{m+1}} = 2\frac{p_m}{q_m}\frac{p^m}{q^m}\frac{p}{q\varphi_{m+1}}.$$

Donc

$$2\frac{p_m}{q_m}\frac{p^m}{q^m}\frac{p}{q\varphi_{m+1}} > \frac{1}{\mathrm{M}(q^m q_m)^{\alpha}}, \qquad \varphi_{m+1} < \frac{2\mathrm{M}}{q} p_m q_m^{\alpha-1} p^{m+1} q^{m(\alpha-1)}.$$

Pour les fonctions d'indice fini, d'après le corollaire I, on peut prendre $\varphi_{m+1} \geqq e_k(m+1)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1}$ $(k \geqq 3)$, et il faut [1]

$$e_k(m+1)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1} < \frac{2M}{q} e_k(m)^{\tau m} e_k(m)^{\tau_1 m(\alpha-1)} p^{m+1} q^{m(\alpha-1)} < e_k(m)^{\tau_2 m},$$

où τ_1, τ_2 sont finis, a_m satisfaisant ici à (12 *bis*). D'après le lemme II, cette inégalité est impossible, quel que soit α, et $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est transcendant.

$f\left(\frac{p}{q}\right)$ est d'ailleurs ici irrationnel dans les deux cas (A), car

$$p_m \leqq e_k(m)^{\tau m} < e_k(m+1)^{\tau}$$

(lemme II), pour m assez grand.

Nous pouvons alors énoncer ce théorème :

Théorème II. — *Soit une fonction entière d'ordre ou d'indice absolument quelconque, même transfini ou infini,*

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n,$$

à coefficients tous rationnels et réels : on pourra toujours supposer

$$a_n = \pm \frac{p_n}{q_n}$$

(p_n, q_n entiers, premiers entre eux ou non), q_{n+i} étant divisible par q_n $(i > 0)$. Supposons de plus [conditions (A)] ou bien que les a_n soient positifs, ou bien que $\left|\frac{a_n}{a_{n+\mu}}\right|$ croisse constamment et indéfiniment avec n (a_n, $a_{n+\mu} \neq 0$, $a_{n+1} = \ldots = a_{n+\mu-1} = 0$, $\mu > 0$). Si à partir d'une certaine valeur de n, p_n est d'ordre de grandeur inférieur à une certaine fonction croissante Φ_n de n qui dépend du

---

[1] $\left|\frac{q_m}{p_m}\right| = e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)m}$, $\quad q_m = |p_m| e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)m} = e_k(m)^{\tau_1 m}$ $\quad$ (τ_1 fini).

mode de décroissance des a_n, $f\left(\frac{1}{q}\right)$ *est irrationnel, quel que soit l'entier* $q \geqq 1$. *En particulier* $f(1)$ *est irrationnel. L'ordre de grandeur de* Φ_n *croît avec l'ordre de grandeur des inverses des coefficients* a_n.

Quand ces fonctions entières sont d'ordre $(0, 1, \rho)$, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ (p, q *positifs premiers entre eux*) *est irrationnel dans les mêmes conditions, tant que* p *ne dépasse pas une certaine limite.*

Quand ces fonctions entières sont d'indice $\geqq 2$, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ *est irrationnel dans les mêmes conditions.*

Enfin quand ces fonctions entières sont d'indice $\geqq 3$, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ *est transcendant.*

On peut déterminer pour toutes celles de ces fonctions qui sont d'ordre non transfini ou d'indice fini des limites supérieures de p_m *telles que ces résultats aient sûrement lieu.*

1° *Ordre non transfini* (k, ρ) *ou indice fini* $-k$. — *Il suffit*

$$p_m \leqq (\log_k m)^\tau,$$

où τ *est fixe et* $< \frac{1}{\rho}$, *pour que* $f\left(\frac{1}{q}\right)$ *soit irrationnel. Ceci a lieu même pour* $k = 0$ *ou* $k < 0$ (¹).

2° *Ordre nul, indice fini* $k \geqq 2$. — *Il suffit* $p_m \leqq e_k(m+1)^\tau$, *où* τ *est fixe et* $< \frac{1}{\rho}$.

3° *Ordre nul, indice fini* $k \geqq 3$. *La fonction entière étant absolument quelconque* [*conditions* (A) *réalisées ou non*], *avec*

$$p_m \leqq e_k(m)^{\tau m} \qquad \left(\tau \text{ fixe} < \frac{1}{\rho}\right),$$

$f\left(\frac{p}{q}\right)$ *ne peut être algébrique. Si donc les* a_n *satisfont aux conditions* (A), $f\left(\frac{p}{q}\right)$ *est transcendant.*

(¹) $\log_{-1} m = e^m, \quad \log_{-2} m = e_2(m) = e^{e^m}, \quad \ldots.$

A ce théorème on peut rattacher la question 2339 posée par nous dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

Nous allons encore établir la propriété suivante :

Théorème II *bis*. — *Tout étant posé, comme au premier alinéa du théorème II, supposons que* $\left|\frac{a_n}{a_{n+\mu}}\right|$ *croisse constamment et indéfiniment avec n. Quel que soit l'ordre de* $f(x)$, *supposé toutefois non transfini,* $f\left(\frac{p}{q}\right)$ *est transcendant dès que* $\frac{n+\mu}{n}$ *croît indéfiniment avec n et* $p_n \leqq (\log_k n)^\tau$.

En effet, considérons une fonction entière $f(x)$ quelconque, d'ordre quelconque transfini ou non, mais qui ait des lacunes. On a (¹)

$$|R_m| < 2|u_m| \frac{|x|^\mu}{\varphi^\mu_{m+\mu}}.$$

Si μ croît assez vite avec m, pour $x = \frac{p}{q}$, $|R_m| < \frac{1}{M(q^m q_m)^\alpha}$. On a

$$R_m \neq 0$$

quand les conditions (A) ont lieu, et alors $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est transcendant.

Plaçons-nous en particulier dans le cas du corollaire IV et des fonctions entières d'ordre non transfini ou d'indice fini : $R_m \neq 0$. Il faut

$$|R_m| \leqq |a_{m+\mu}| \left(\frac{p}{q}\right)^{m+\mu} (1+\varepsilon),$$

d'où

$$\frac{p_{m+\mu}}{q_{m+\mu}} \left(\frac{p}{q}\right)^{m+\mu} (1+\varepsilon') > \frac{1}{M q^{m\alpha} q_m^\alpha},$$

si $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est algébrique. Prenons

$$p_m \leqq (\log_k m)^\tau, \qquad \tau < \frac{1}{\rho} \quad \text{et fixe.}$$

D'après le corollaire I, si a_m satisfait à (12 *bis*),

$$\frac{p_m}{q_m} = (\log_k m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)},$$

$$p_n = (\log_k n)^{n\varepsilon_1}, \qquad q_m = (\log_k m)^{m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2\right)},$$

$$\frac{q_{m+\mu}}{p_{m+\mu}} \geqq [\log_k(m+\mu)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_3\right)(m+\mu)}.$$

(¹) Note (¹), p. 292.

Il faudrait

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{m+\mu}[\log_k(m+\mu)]^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_3\right)(m+\mu)} < \mathrm{M}q^{m\alpha}(\log_k m)^{m\alpha\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2\right)}(1+\varepsilon'),$$

$$(m+\mu)\log\left(\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_3\right)(m+\mu)\log_{k+1}(m+\mu)$$
$$< m\alpha\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_4\right)\log_{k+1} m.$$

Que k soit positif ou négatif, ceci est manifestement impossible quand $\frac{m+\mu}{m\log_{k+1} m}$ croît indéfiniment avec m, ou même si seulement

$$m+\mu = m\Psi_m,$$

où Ψ_m croît indéfiniment avec m. C. Q. F. D.

Remarque. — Ce raisonnement s'étend d'ailleurs aux fonctions d'ordre transfini quand p_{m_1} est fini ou $\leqq \varphi_{m_1}^{m_1\theta}$ (θ fini).

En effet, on aura, d'après l'inégalité (α) de M. Hadamard,

$$|a_{m_1}^{-1}| \geqq \varphi_{m_1}^{m_1}, \qquad |a_m^{-1}| = \varphi_m^m \quad \text{et} \quad q_m \leqq \varphi_m^{m(1+\theta)},$$
$$\left(\frac{q}{p}\right)^{m+\mu}|a_{m+\mu}^{-1}| < \mathrm{M}q^{m\alpha}q_m^{\alpha}(1+\varepsilon');$$

$$(m+\mu)\log\left(\frac{q}{p}\right)+(m+\mu)\log\varphi_{m+\mu} < m\alpha\log q + m\alpha(1+\theta+\varepsilon'')\log\varphi_m.$$

Il suffit encore que $m+\mu = m\Psi_m$, où Ψ_m croît indéfiniment avec m, pour que cette inégalité soit impossible, par suite, pour que $f\left(\frac{p}{q}\right)$ soit transcendant.

§ IV. — *Addition des fonctions entières et des nombres transcendants.*

Soient les fonctions entières

$$(17) \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty \pm \frac{p_n}{q_n} x^n,$$

où $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ est entier, $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ croît constamment et indéfiniment avec n, et

où p_n est d'ordre de grandeur moindre qu'une certaine fonction de n déterminée comme précédemment. Si, par exemple, $F(x)$ est d'ordre non transfini (k, ρ), ou d'indice fini, on pourra prendre pour les valeurs de a_n satisfaisant à (12 *bis*) (corollaire I) φ_n ou $\psi_n = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1}$ (k positif ou négatif), $q_n = (\log_k n)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)n}$, $p_n < (\log_k n)^{\tau}$ $\left(\tau \text{ fixe} < \frac{1}{\rho}\right)$ au moins à partir d'une certaine valeur de n. Le corollaire IV du théorème I est applicable à ces fonctions.

Les valeurs $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ *étant données, et les* $\pm p_n$ *prenant toutes les valeurs positives ou négatives compatibles avec les conditions ci-dessus, nous dirons que les fonctions* $F(x)$ *correspondantes forment* un ensemble E. *Nous désignerons par* ΣE *l'ensemble des ensembles* E *correspondant à une même valeur de* k *et de* ρ.

Ces ensembles jouissent de propriétés arithmétiques curieuses, dont nous allons nous occuper [1].

1° *Somme algébrique ou arithmétique des fonctions de* E *ou de* ΣE.

A étant rationnel, $AF(x)$ appartient à l'ensemble.

Si $F(x)$ et $F_1(x)$ appartiennent à l'ensemble E, $F(x) \pm F_1(x)$ lui appartiendra, à moins que cette somme ne soit un polynome $P(x)$, c'est-à-dire

$$F \pm F_1 = P.$$

Donc

La somme algébrique $f(x)$ *d'un nombre fini quelconque de fonctions* $F, F_1, F_2, \ldots$ *de l'ensemble* E *lui appartient ou se réduit à un polynone.*

D'après le théorème II, $F\left(\frac{p}{q}\right), F_1\left(\frac{p}{q}\right), \cdots$ sont respectivement irrationnels (pour $p = 1$, ou $p > 1$) ou transcendants. Suivant ces divers

---

[1] Les extensions au cas où les p_n et p sont imaginaires sont assez souvent évidentes : nous en ajouterons à l'occasion.

cas, nous dirons que les nombres irrationnels ou transcendants correspondants forment *un ensemble* H_{pq} (p, q fixes). Les fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, ... seront *les fonctions génératrices* de ces nombres. Donc :

La somme algébrique d'un nombre quelconque fini de nombres de l'ensemble H_{pq} *est un nombre de l'ensemble, à moins que la somme algébrique des fonctions génératrices correspondantes ne se réduise à un polynome.*

On peut généraliser cette propriété quand $k \geqq 2$: le nombre $F_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$ peut être considéré comme engendré par la fonction

$$F_1\left(\frac{q}{p}\frac{p_1}{q_1}x\right) = F_1^{(1)}(x) = \Sigma \pm \frac{P_n}{Q_n}x^n,$$

pour $x = \frac{p}{q}$, en posant

$$\left(\frac{qp_1}{pq_1}\right)^n \frac{p_n}{q_n} = \frac{P_n}{Q_n}.$$

On a, au moins pour les valeurs de n satisfaisant à (12 *bis*), k étant supposé fini,

$$q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)n}, \qquad p_n < e_k(n)^{\tau} \quad (^1),$$

$$p_n(qp_1)^n < e_k(n)^{\tau+\varepsilon_2}, \qquad (pq_1)^n q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_3\right)n},$$

ε_2, ε_3 tendant vers zéro quand n croît indéfiniment. Donc $F_1^{(1)}(x)$ appartient aussi à un ensemble $E^{(1)}$ analogue à E, qui contient d'ailleurs E, car les fonctions $F(x)$ de E sont de la forme

$$\Sigma \pm \frac{(pq_1)^n}{(pq_1)^n}\frac{p_n}{q_n}x^n = \Sigma \pm \frac{(pq_1)^n p_n}{Q_n}x^n,$$

où

$$(pq_1)^n p_n < e_k(n)^{\tau+\varepsilon_4}.$$

Le nombre $F\left(\frac{p}{q}\right) + F_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$ sera respectivement au moins irra-

---

(1) Si $k \geqq 3$, on peut prendre $p_n < e_k(n)^{\tau n}$, avec τ fixe $< \frac{1}{\rho}$.

tionnel, ou transcendant suivant que $k = 2$ ou $k \geqq 3$, sauf si

$$F(x) + F_1\left(\frac{qp_1}{pq_1}x\right)$$

se réduit à un polynome.

Si nous supposons de plus *tous les coefficients de* $F(x)$ *ou* $F_1^{(1)}(x)$ *positifs*, celles des fonctions E ou $E^{(1)}$ qui jouissent de cette propriété formeront un *sous-ensemble* E′ ou $E'^{(1)}$, $E'^{(1)}$ contenant E′. *La somme arithmétique de deux ou plusieurs fonctions de l'ensemble* E′ *ou* $E'^{(1)}$ *lui appartient et ne peut se réduire à un polynome. La somme arithmétique d'un nombre fini quelconque de nombres du sous-ensemble* H'_{pq} *ou* $H'^{(1)}_{pq}$ (*correspondant à* $E'^{(1)}$) *lui appartient.*

Mais, de plus, soient deux de ces sous-ensembles H'_{pq}, $H'_{p_1q_1}$ de nombres issus de E′. Ces deux sous-ensembles appartiennent à $H'^{(1)}_{pq}$, d'après ce qui précède; donc :

On obtient tous les nombres irrationnels ou transcendants, respectivement, engendrés par les fonctions du sous-ensemble E′ *quand* x *prend les diverses valeurs* $\frac{\varpi}{\chi}$ (ϖ, χ *entiers positifs limités*) *en donnant à* x *dans les fonctions d'un sous-ensemble* $E'^{(2)}$ *analogue et contenant* E′ *une valeur rationnelle arbitraire,* 1 *par exemple. Le sous-ensemble* $H'^{(2)}$ *de ces nombres est tel que la somme arithmétique de deux nombres de* $H'^{(2)}$ *appartient à* $H'^{(2)}$.

Quels que soient ϖ et χ, $E'^{(2)}$ appartient à $\Sigma E'$ et $H'^{(2)}$ à $\Sigma H'_{pq}$ qui correspond à $\Sigma E'$. On obtient donc tous les nombres transcendants que peut donner E′ quand x est rationnel, en donnant à x dans les fonctions de $\Sigma E'$ une valeur rationnelle arbitraire, par exemple $x = 1$.

Soit, en particulier,

$$f(x) = F(x) + F_1\left(\frac{q^2}{p^2}x\right),$$

et faisons $x = \frac{p}{q}$.

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = F\left(\frac{p}{q}\right) + F_1\left(\frac{q}{p}\right);$$

c'est-à-dire que, si

$$\varphi(x) = F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right).$$

Plus généralement, soient $a = \frac{p_2}{q_2}$ un nombre rationnel, $F_2(z)$ une fonction de E′ et la fonction $F_2\left(\frac{1}{x-a}\right)$; pour $x = \frac{p}{q}$, $F_2\left(\frac{1}{\frac{p}{q} - a}\right)$ appartient à $H'^{(2)}$, pourvu que $\frac{p}{q}$ soit $> a$, ce qui a lieu si $a < 0$ $\left(\text{nous supposons toujours } \frac{p}{q} > 0\right)$.

Appelons alors l'ensemble des fonctions quasi-entières

$$\varphi(x) = F(x) + F_1(x) + F_2\left(\frac{1}{x - a_1}\right) + \ldots,$$

où $F(z)$, $F_1(z)$, $F_2(z)$, ... appartiennent à E′, *ensemble* Q *de fonctions quasi-entières dérivé de* E′ (a_1, a_2, ... *négatifs et donnés, en nombre limité*) : *la somme arithmétique de deux fonctions de* Q *appartient à* Q. *L'ensemble des nombres* $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ *coïncide avec un ensemble de nombres analogue à* H'_{pq}, *et est compris dans* $\Sigma H'_{11}$.

Autrement dit :

Théorème III. — *Soient* $F(x)$, $F_1(x)$, ... *des fonctions appartenant au sous-ensemble* E′; a_1, a_2, ..., a_θ *des nombres rationnels positifs ou négatifs, et la fonction quasi-entière*

$$\varphi(x) = F(x) + F_1(x) + F_2\left(\frac{1}{x - a_1}\right) + \ldots + F_{\theta+1}\left(\frac{1}{x - a_\theta}\right).$$

Si E′ *est d'indice* $\geqq 2$ (¹), $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ *est irrationnel dès que* $\frac{p}{q}$ *est rationnel, positif et* $\geqq a_j$, *quel que soit* j. *Si* E′ *est d'indice* $\geqq 3$, $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ *est transcendant.*

(¹) L'indice de l'ensemble est l'indice commun aux diverses fonctions de cet ensemble; de même pour l'ordre.

Pour les fonctions quasi-entières d'indice ≤ 1 d'un même ensemble E, on peut aussi obtenir des applications arithmétiques intéressantes, mais beaucoup plus particulières. Nous savons seulement que $F\left(\frac{p}{q}\right)$ est irrationnel pour des valeurs de p limitées; la fonction $F_1\left(\frac{1}{x}\right)$ introduira la quantité $F\left(\frac{q}{p}\right)$ que nous ne savons irrationnelle que pour des valeurs de q limitées. On est conduit à ne considérer que des valeurs de p et q limitées. Nous prendrons en particulier $p = 1$, $q = 1$ et les fonctions quasi-entières $F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi_1(x)$, de façon que le raisonnement soit toujours applicable, même si $F(z)$ et $F_1(z)$ sont d'ordre fini.

Dans ce cas, on peut considérer le nombre $F(1) + F_1(1)$ comme issu aussi bien de $F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right)$ que de $F(x) + F_1(x)$ pour $x = 1$. Par suite, le nombre $F(1) + F_1(1) + F_2(1) + \ldots$ provenant d'une somme de fonctions de la forme $\varphi_1(x)$ issues de E sera irrationnel, sauf si la fonction $F(x) + F_1(x) + \ldots$ se réduit à un polynome.

Théorème IV. — *Soient* $F(x)$, $F_1(x)$, ... *des fonctions de l'ensemble* E *d'ordre ou d'indice quelconque* : $F(1) + F_1(1) + \ldots$ *est irrationnel si* $F(x) + F_1(x) + \ldots$ *ne se réduit pas à un polynome. Par suite, si* $F(x)$ *et* $F_1(x)$ *ont leurs coefficients positifs* (*ensemble* E′), *et si* $\varphi(x) = F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right)$, $\varphi(1)$ *et toute somme arithmétique de nombres* $\varphi(1)$ *sont irrationnels.*

Considérons particulièrement les quatre fonctions θ, θ_1, θ_2, θ_3 de Jacobi sous la forme

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
ir^{\frac{1}{8}}\theta(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n r^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} z^{2n+1} = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n r^{-n^2-n} z^{2n+1},\\
r^{\frac{1}{8}}\theta_1(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \qquad r^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} z^{2n+1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{-n^2-n} z^{2n+1},\\
\theta_2(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n r^{-n^2} z^{2n},\\
\theta_3(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{-n^2} z^{2n},
\end{aligned}\right.$$

ou encore

$$ir^{\frac{1}{4}}\theta(z) = \sum_0^\infty (-1)^n r^{-n^2-n} z^{2n+1} + \sum_1^\infty (-1)^{n_1} r^{-n_1^2+n_1}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n_1-1}$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n r^{-n^2-n} z^{2n+1} + \sum_0^\infty (-1)^{n+1} r^{-(n+1)^2+n+1}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1},$$

$$ir^{\frac{1}{4}}\theta(z) = \sum_0^\infty (-1)^n r^{-n^2-n}\left(z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}}\right);$$

$$r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z) = \sum_0^\infty r^{-n^2-n}\left(z^{2n+1} + \frac{1}{z^{2n+1}}\right);$$

$$\theta_2(z) = \sum_0^\infty (-1)^n r^{-n^2} z^{2n} + \sum_1^\infty (-1)^{n_1} r^{-n_1^2}\frac{1}{z^{2n_1}},$$

$$\theta_2(z) = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n r^{-n^2}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right);$$

$$\theta_3(z) = 1 + \sum_1^\infty r^{-n^2}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right).$$

On a $r^{n^2+n} = R^{2n+1}$ avec $R = r^{\frac{n^2+n}{2n+1}} = e^{\frac{\log r}{4}(2n+1)(1+\varepsilon)}$ (on suppose ici r entier réel et > 1), et $\theta(z)$ et $\theta_1(z)$ sont d'ordre $\left(0, 1, \frac{4}{\log r}\right)$, et d'indice 1 aux environs de leurs deux points essentiels, ainsi que leurs dérivées [1]. De même, si

$$r^{n^2} = R_1^{2n}, \qquad R_1 = r^{\frac{n^2}{2n}} = r^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{\log r}{4}\cdot 2n},$$

et θ_2, θ_3 sont du même ordre que θ, θ_1, ainsi que leurs dérivées. Cette propriété a lieu aussi bien aux environs de $z = 0$ que de $z = \infty$.

---

[1] La dérivée d'une fonction entière ou quasi-entière d'ordre non transfini, ou d'indice fini est évidemment de même ordre ou de même indice.

Au sujet de $\theta_3(z)$ comp. E. Lindelöf, *Mémoire sur la théorie des fonctions entières,* p. 43; *Acta Societ. Scient. Fennicæ,* t. XXXI, 1902; Hadamard, Mémoire couronné, *Journal de Mathématiques,* 1893, p. 179.

On a $\theta(1) = 0$. Mais $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(1)$ et $\theta_3(1)$ ont tous leurs termes positifs, et, par suite, sont irrationnels [1] quand r est entier. De même pour $\theta_2(1)$, le corollaire IV du théorème I étant applicable aux quatre fonctions θ.

On voit encore que toutes les dérivées de $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z)$ et $\theta_3(z)$ autres que les dérivées premières sont irrationnelles pour $z = 1$ (r entier > 1). En effet, on a

$$\frac{d^{2\lambda}\left[\theta_1(z).r^{\frac{1}{4}}\right]}{dz^{2\lambda}} = \Sigma r^{-n^2-n}\left[z^{2n-2\lambda+1}(2n+1)2n\ldots(2n+2-2\lambda)\right.$$
$$\left.+ z^{-2n-2\lambda-1}(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+2\lambda)\right].$$

En laissant de côté un certain nombre de termes relatifs aux petites valeurs de n, ceci peut s'écrire, pour $z = 1$,

$$\Sigma r^{-n^2-n}\Pi_\lambda \qquad (n > 0),$$

Π_λ étant un polynome en n de degré 2λ, ce qui est la valeur de

$$\Sigma r^{-n^2-n}\Pi_\lambda y^n,$$

pour $y = 1$. Pour cette fonction, d'après le corollaire I du théorème I,

$$|a_n^{-1}| = r^{(n^2+n)(1+\varepsilon)} = r^{n^2(1+\varepsilon')} = e^{n^2\log r(1+\varepsilon'')},$$

et

$$\varphi_n = e^{n\log r(1-\varepsilon_1)} = r^{n(1-\varepsilon_1)},$$

qui, pour $r > 1$, est d'ordre de grandeur supérieur à Π_λ, dès que n est assez grand (p. 301) : donc la dérivée $(2\lambda)^{\text{ième}}$ de $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z)$ est irrationnelle pour $z = 1$.

On peut faire un raisonnement analogue pour les dérivées d'ordre pair de $\theta_3(z)$.

De même, pour les dérivées d'ordre impair, autres que les dérivées premières $[\theta'_1(1) = \theta'_2(1) = \theta'_3(1) = 0]$.

---

[1] Propriété déjà indiquée par Liouville (*Journal de Mathématiques*, 1851, p. 140), en ce qui concerne une de ces quantités.

Ainsi

$$\frac{d^{2\lambda+1}\theta_3}{dz^{2\lambda+1}} = \sum r^{-n^2}\left[z^{2n-2\lambda-1}\,2n(2n-1)\ldots(2n-2\lambda)\right.$$
$$\left.-z^{-2n-2\lambda-1}\,2n(2n+1)\ldots(2n+2\lambda)\right] \qquad (n>0).$$

Ceci s'écrit encore, pour $z=1$,

$$\sum r^{-n^2}\chi_\lambda \qquad (n>0),$$

χ_λ étant un polynome en n de degré $\leqq 2\lambda$ qui ne s'annule pas, dès que n est supérieur à une certaine limite, et qui a une valeur négative. Le corollaire IV du théorème I étant applicable à $\sum r^{-n^2}\chi_\lambda z^n$ $(n>0)$, le raisonnement s'achève comme précédemment, et $\frac{d^{2\lambda+1}\theta_3}{dz^{2\lambda+1}}$ est irrationnel pour $z=1$; de même pour les dérivées d'ordre impair de $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z)$.

En résumé :

Corollaire. — *Soient* $\theta(z)$, θ_1, θ_2, θ_3 *les quatre fonctions* θ *de Jacobi, avec, par exemple,*

$$\theta_3(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{-n^2} z^{2n},$$

r *étant entier réel* >1. $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z)$, $\theta_3(z)$, *et toutes leurs dérivées d'ordre* $\geqq 2$, *enfin* $\theta_2(z)$ *sont, pour* $z=1$, *des quantités irrationnelles* (¹).

Il en est de même pour toute fonction linéaire à coefficients rationnels positifs de $r^{\frac{1}{4}}\theta_1(z)$, $\theta_3(z)$ et leurs dérivées d'indice pair et de $\theta_2(z)$, quand $z=1$; car les corollaires I et IV du théorème I sont applicables à cette combinaison.

(¹) Nous n'insistons pas sur l'extension possible de ces résultats aux dérivées de $ir^{\frac{1}{4}}\theta(z)$ et de $\theta_2(z)$.

§ V. — 2° *Produits de fonctions de* E *ou de* $\sum$E. *Multiplication des nombres transcendants.*

Considérons les deux fonctions $F(x)$, $F_1(x)$ de l'ensemble E, et

$$F(x)F_1(x) = \sum_0^\infty \frac{p_n}{q_n} x^n \sum_0^\infty \frac{p_n^{(1)}}{q_n} x^n \qquad (p_n,\ p_n^{(1)} \text{ positifs ou négatifs}).$$

Nous supposerons ici que, dès que n dépasse une certaine limite, $q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)n}$, quel que soit n.

Nous pouvons faire le développement de ce produit en mettant en évidence la somme

$$\frac{\Phi_\nu(x)}{q_\nu^2} = p_\nu^{(1)} \frac{x^\nu}{q_\nu} \sum_0^{\nu-1} \frac{p_n}{q_n} x^n + \frac{p_\nu}{q_\nu} x^\nu \sum_0^{\nu-1} \frac{p_n^{(1)}}{q_n} x^n + \frac{p_\nu p_\nu^{(1)}}{q_\nu^2} x^{2\nu}.$$

Admettons que l'ensemble E soit d'indice $k \geqq 3$. On a

$$F(x)F_1(x) = \sum \frac{\Phi_\nu(x)}{q_\nu^2}.$$

On peut aussi écrire

$$\frac{\Phi_\nu(x)}{q_\nu^2} = \frac{x^\nu \sum_0^{\nu-1} \varpi_n x^n}{q_\nu q_{\nu-1}} + \frac{x^{2\nu} \varpi'_n}{q_\nu^2},$$

où ϖ_n, ϖ'_n sont d'ordres respectivement au plus égaux à ceux de $q_{\nu-1}$ multiplié par celui de la plus grande des quantités $p_n p_n^{(1)}$ $(n,\ n' \leqq \nu)$, ou à celui de $p_\nu p_\nu^{(1)}$.

Considérons plus généralement

$$F(x)F_1(x)\ldots F_{\lambda-1}(x) = \sum_0^\infty \frac{p_n}{q_n} x^n \ldots \sum_0^\infty \frac{p_n^{(\lambda-1)}}{q_n} x^n.$$

Ce sera la somme de termes de la forme

$$\sum_0^{\nu-1} \frac{p_n}{q_n} x^n \ldots \sum_0^{\nu-1} \frac{p_n^{(\lambda-2)}}{q_n} x^n \frac{p_\nu^{(\lambda-1)}}{q_\nu} x^\nu,$$

$$\sum_0^{\nu-1} \frac{p_n}{q_n} x^n \ldots \sum_0^{\nu-1} \frac{p_n^{(\lambda-3)}}{q_n} x^n \frac{p_\nu^{(\lambda-2)} p_\nu^{(\lambda-1)}}{q_\nu^2} x^{2\nu},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{p_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)}}{q_\nu^\lambda} x^{\lambda\nu}.$$

Nous supposons ici $p_\nu, \ldots, p_\nu^{(\lambda-1)}$ croissant assez lentement avec ν. On aura ainsi

$$F(x) F_1(x) \ldots F_{\lambda-1}(x) = \sum_0^\infty \left[\frac{\psi'_\nu(x)}{q_\nu q_{\nu-1}^{\lambda-1}} + \frac{\psi''_\nu(x)}{q_\nu^2 q_{\nu-1}^{\lambda-2}} + \ldots + \frac{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)}{q_\nu^\lambda} \right],$$

avec

$$\psi_\nu^{(\lambda)}(x) = P_\nu x^{\lambda\nu}, \qquad P_\nu = p_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)},$$

les $\psi_n^{(i)}$ étant des polynomes à coefficients entiers. Ici (lemmes I et II)

$$q_{\nu-1}^i = e_k(\nu-1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(\nu-1)i} = e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_1},$$

où ε_1 tend vers o avec $\frac{1}{\nu}$. D'ailleurs $q_\nu^{\lambda-i} q_{\nu-1}^i$ divise $q_\nu^{\lambda-j} q_{\nu-1}^j$ dès que $j < i$, car le quotient est $\left(\frac{q_\nu}{q_{\nu-1}}\right)^{i-j}$.

Nous sommes ainsi amené à étudier les expressions de la forme

$$(19) \qquad g^{(\lambda)}(x) = \sum_0^\infty \left[\frac{\psi'_\nu(x)}{Q'_\nu} + \frac{\psi''_\nu(x)}{Q''_\nu} + \ldots + \frac{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)}{Q_\nu^{(\lambda)}} \right],$$

où

$$Q_\nu^{(i)} = e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right) i\nu},$$

les polynomes $\psi'_\nu, \ldots, \psi_\nu^{(\lambda)}$ étant de degrés $\leqq \lambda\nu$, et leurs coefficients,

qui sont entiers [1], d'ordre $\leqq e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_2}$, si l'on suppose que $|p_\nu|$, $|p_\nu^{(1)}|$, ... aient une limite supérieure de même forme. $Q_\nu^{(i-1)}$ divise $Q_\nu^{(i)}$, $Q_\nu^{(\lambda)}$ divise $Q'_{\nu+1}$.

Considérons l'ensemble des fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ satisfaisant à ces conditions : la fonction $F(x)$ est évidemment de la forme $g^{(\lambda)}(x)$. *Le produit de deux fonctions* $g^{(\lambda)}(x)$ *est une fonction* $g^{(2\lambda)}(x)$. *Toute somme algébrique de fonctions* [2] $g^{(\lambda)}(x)$ *est une fonction* $g^{(\lambda)}(x)$. *Le produit de* λ *fonctions* $F(x)$ *de* E *appartient à* L'ENSEMBLE $g^{(\lambda)}(x)$ [c'est-à-dire est de la forme $g^{(\lambda)}(x)$].

En considérant les produits de λ fonctions au plus du sous-ensemble E' on obtiendrait de même une suite de sous-ensembles tous contenus respectivement dans les sous-ensembles $\gamma^{(\lambda)}(x)$ déduits de $g^{(\lambda)}(x)$ en n'attribuant aux coefficients que des valeurs nulles ou positives : la somme arithmétique de deux $\gamma^{(\lambda)}(x)$ est de la même forme; le produit est de la forme $\gamma^{(2\lambda)}(x)$.

Les séries $g^{(\lambda)}(x)$ *sont des fonctions entières,* car, pour toute valeur de x, le rapport d'un terme au précédent tend évidemment vers o (lemme II). *Toute propriété commune aux séries* $g^{(\lambda)}(x)$ *appartient simultanément aux fonctions de* E' *et à leurs produits* 2 à 2, 3 à 3, ..., λ à λ. *En particulier, pour toute valeur de* $x = \frac{p}{q}$ *rationnelle, d'ailleurs réelle ou imaginaire,* $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ *est, en général, transcendant.*

En effet, d'abord, le corollaire IV du théorème I s'étend à $g^{(\lambda)}(x)$. Soit

$$g^{(\lambda)}(x) = \sum_1^\infty u_n.$$

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ est d'une des formes

$$\delta = \frac{\psi_\nu^{(i+1)}(x)}{\psi_\nu^{(i)}(x)} \frac{Q_\nu^{(i)}}{Q_\nu^{(i+1)}},$$

---

[1] Nos raisonnements subsistent quand on donne aux coefficients des $\psi_\nu^{(i)}(x)$ des valeurs imaginaires dont les modules satisfont à des conditions analogues.

[2] Correspondant à des valeurs identiques des $Q_\nu^{(i)}$.

ou

$$\delta' = \frac{\psi'_{\nu+1}(x)}{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)} \frac{Q_\nu^{(\lambda)}}{Q'_{\nu+}}.$$

Or

$$|\psi_\nu^{(i)}(x)| \leqq \xi_1^{\lambda\nu} e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_3}, \qquad \text{si} \qquad |x| \leqq \xi_1,$$

$$\frac{Q_\nu^{(i)}}{Q_\nu^{(i+1)}} \leqq e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_4\right)i\nu - \left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_5\right)(i+1)\nu} = e_k(\nu)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_6\right)\nu},$$

$$\frac{Q_\nu^{(\lambda)}}{Q'_{\nu+1}} \leqq \frac{e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_7\right)\lambda\nu}}{e_k(\nu+1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_8\right)(\nu+1)}} = e_k(\nu+1)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_9\right)(\nu+1)},$$

d'après le lemme II. Dès lors, x étant donné, pour m assez grand, δ et δ' sont aussi petits qu'on veut; et ceci s'étendrait de suite au cas où $g^{(\lambda)}(x)$ présente des lacunes. Donc

$$|u_{m+\mu}|(1-\varepsilon') \leqq \left| g^{(\lambda)}(x) - \sum_0^m u_n(x) \right| \leqq |u_{m+\mu}|(1+\varepsilon')$$

$$(u_{m+1} = \ldots = u_{m+\mu-1} = 0,\ u_m,\ u_{m+\mu} \neq 0).$$

Les inégalités du corollaire IV du théorème I s'appliquent encore à $g^{(\lambda)}(x)$.

Ceci posé, soit

$$\frac{p}{q} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{\alpha+\beta i}{\gamma}$$

(α, β, γ entiers réels),

$$\sum_1^m u_n\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{M+Ni}{Q_\nu^{(i)}\gamma^{\lambda\nu}},$$

où M et N sont entiers, et $u_m(x) = u_m$ est un terme de $g^{(\lambda)}(x)$ de la forme $\frac{\psi_\nu^{(i)}(x)}{Q_\nu^{(i)}}$. Dans le cas où $g^{(\lambda)}(x) = F(x)F_1(x)\ldots F_{\lambda-1}(x)$,

$$\psi_\nu^{(\lambda)}(x) = P_\nu x^{\lambda\nu} \qquad \text{où} \qquad P_\nu = p_\nu p'_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)}.$$

Admettons que $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) = \xi$ soit rationnel ou algébrique de degré α_1.

1° ξ est rationnel. Deux cas pourront se présenter : ou bien

$$g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) - \sum_{1}^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)$$

est $\neq 0$ pour une infinité de valeurs de m; d'après la propriété I,

$$\left|\xi - \sum_{1}^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqq \frac{1}{M_1 Q_m^{(\lambda)} \gamma^{\lambda m}} \qquad (M_1 \text{ fini}),$$

pour une infinité de valeurs de m; ou bien

$$g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) - \sum_{1}^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$$

dès que $m > m_1$; ce cas est évidemment impossible [1], soit quand $g^{(\lambda)}(x) = F F_1 \ldots F_{\lambda-1}$ et que $p_\nu p'_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)}$ est $\neq 0$ pour une infinité de valeurs de $\nu > \nu_1$ (comme cela a lieu par exemple quand les F, ...,

---

[1] Si ce cas est réalisé, on a, pour $x = \frac{p}{q}$,

$$\Psi = \frac{\psi'_\nu(x)}{Q'_\nu} + \frac{\psi''_\nu(x)}{Q''_\nu} + \ldots + \frac{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)}{Q_\nu^{(\lambda)}} = 0.$$

Or, on a, si $\psi_\nu^{(i)}(x) \neq 0$,

$$\gamma^{-\lambda\nu} \leqq |\psi_\nu^{(i)}(x)| \leqq e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_i},$$
$$Q_\nu^{(i)} = e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_i\right) i\nu}.$$

Si

$$\psi'_\nu\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0, \qquad \Psi \gamma^{\lambda\nu} Q'_\nu = \gamma^{\lambda\nu} \psi'_\nu\left(\frac{p}{q}\right) + \Lambda = 0,$$

où Λ est aussi petit qu'on veut, quand ν est assez grand, et $\gamma^{\lambda\nu}\psi'_\nu\left(\frac{p}{q}\right)$ est entier $\neq 0$: ce résultat est absurde, et $\psi'_\nu\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. De même, successivement,

$$\psi'_\nu\left(\frac{p}{q}\right) = \psi''_\nu\left(\frac{p}{q}\right) = \ldots = \psi_\nu^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) = 0.$$

$F^{(\lambda-1)}$ ne présentent pas de lacunes), soit quand $\frac{p}{q}$ est réel, > 0, et que les coefficients d'une infinité des polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ sont $\neq 0$, et de même signe pour chaque polynome. De toutes façons si, pour $m > m_1$, $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, chacun des polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ a entre ses coefficients une certaine relation quand $\nu > \nu_1$. Ce cas n'est donc pas le cas général [1].

---

[1] Quand les coefficients d'une infinité des polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ ont leurs modules limités et $\leqq a$ (a nombre fixe), les racines de $\psi_\nu^{(i)}(x)$ ont leurs modules limités, et le cas exceptionnel $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ pour $m > m_1$ ne peut avoir lieu que quand $\left|\frac{p}{q}\right|$ est inférieur à un nombre fixe.

Mais l'on peut former des fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ qui ne sont pas des polynomes, et qui ont des valeurs rationnelles pour une infinité de valeurs rationnelles de x, et même pour toute valeur rationnelle x. Soit le polynome

$$Z_m(x) = \prod_m (\chi x - \varpi),$$

où ϖ et χ prennent toutes les valeurs des entiers positifs ou négatifs $\neq 0$ et de modules $\leqq m$. $Z_m(x)$ est de degré $4m^2$ et a ses coefficients entiers et d'ordre $< m^{4m^2} = e^{4m^2 \log m}$. La fonction

$$\Phi(x) = A + x \sum_1^\infty \frac{Z_m(x)}{q_{(4m^2+1)}^\lambda} \qquad (A \text{ constante rationnelle, } \lambda \text{ entier} \geqq 1),$$

où

$$q_{(4m^2+1)} = e_k (4m^2+1)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)(4m^2+1)} \qquad \left[k \geqq 3,\ \frac{q_{4(m+1)^2+1}}{q_{(4m^2+1)}} \text{ entier}\right]$$

est une fonction $g^{(1)}(x)$, et $\Phi(x)$ est rationnel pour x rationnel réel. La fonction

$$\Phi_1(x) = A^2 + x^2 \sum_1^\infty \frac{Z_m(x)^2}{q_{(4m^2+1)}^\lambda} \qquad (\lambda \geqq 2)$$

est une fonction $g^{(2)}(x)$, et $\Phi_1(x)$ est rationnel et positif pour x rationnel réel. $\Phi_1(x)$ ne s'annule pour aucune valeur rationnelle de x. Toute fonction rationnelle $\Phi_2(x)$ à coefficients rationnels de fonctions analogues à $\Phi(x)$ ou $\Phi_1(x)$

2° ξ est algébrique : $\xi - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)$ n'est jamais nul, puisque $\sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)$ est rationnel. D'après la propriété I,

$$\left|\xi - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqq \frac{1}{M_1 Q_m^{(\lambda)\alpha_1} \gamma^{\alpha_1 \lambda m}} \qquad (M_1 \text{ fini, } \alpha_1 \text{ entier}).$$

En résumé, que ξ soit rationnel ou algébrique, il faut, *en général*,

$$\left|\xi - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqq \frac{1}{M_1 Q_m^{(\lambda)\alpha_1} \gamma^{\alpha_1 \lambda m}} \qquad (M_1 \text{ fini}),$$

cette condition ayant *toujours* lieu, si ξ est algébrique.

Or, d'après ce qu'on a vu tout à l'heure,

$$\left|\xi - \sum_1^{m\lambda} u_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqq |u_{m\lambda+\mu}|(1+\varepsilon') \leqq 2|u_{m\lambda+\mu}| \leqq 2\,\frac{\psi_{m+\mu_1}^{(j)}\left(\frac{p}{q}\right)}{Q_{m+\mu_1}^{j}},$$

où l'on a $\mu_1 > 0$. Le dernier membre est encore de la forme

$$e_k(m+\mu_1)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(m+\mu_1)j},$$

alors que $\frac{1}{M_1 Q_m^{(\lambda)\alpha_1} \gamma^{\alpha_1 \lambda m}}$ est de la forme

$$e_k(m)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)\lambda m \alpha_1};$$

le rapprochement des deux inégalités précédentes donnerait

$$e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)\lambda m \alpha_1} \geqq e_k(m+\mu_1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(m+\mu_1)j},$$

ce qui est en contradiction avec le lemme II.

Par conséquent, pour x rationnel, si $g^{(\lambda)}(x)$ n'est pas un polynome, $g^{(\lambda)}(x)$ n'est jamais algébrique; il ne peut être rationnel quand $g^{(\lambda)}(x)$ est un produit de λ fonctions $F(x)$ sans lacunes ou pour lesquelles

---

prend pour x rationnel réel quelconque une valeur rationnelle (*Comp.* P. Staeckel, *Math. Ann.*, t. XLVI, 1895, p. 513, et *Comptes rendus*, 20 et 27 mars 1899).

$p_\nu p'_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)} \neq 0$ pour une infinité de valeurs de ν, quand $g^{(\lambda)}(x)$ possède une infinité de polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ dont les coefficients sont tous de même signe, x étant réel et > 0, quand les coefficients d'une infinité de polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ ont leurs modules limités et que $|x| > x_1$, x_1 étant positif et limité. Donc :

Théorème V. — *Soit la fonction*

$$(19) \qquad g^{(\lambda)}(x) = \sum_0^\infty \left[\frac{\psi'_\nu(x)}{Q'_\nu} + \frac{\psi''_\nu(x)}{Q''_\nu} + \ldots + \frac{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)}{Q_\nu^{(\lambda)}} \right],$$

où λ entier, et pour $\nu \geqq \nu_1$,

$$Q_\nu^{(i)} = e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_i\right) i\nu},$$

$Q_\nu^{(i)}$ diviseur de $Q_\nu^{(i+1)}$, $Q_\nu^{(\lambda)}$ de $Q'_{\nu+1}$, ρ nombre fixe, $k \geqq 3$, ε_i tendant vers 0 quand n croît indéfiniment, $\psi'_\nu(x), \ldots, \psi_\nu^{(\lambda)}(x)$ polynomes de degré $\leqq \lambda\nu$ à coefficients entiers, réels ou non, d'ordre $\leqq e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_2}$.

Si $g^{(\lambda)}(x)$ n'est pas un polynome, $\frac{p}{q}$ étant rationnel, réel ou imaginaire, $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ n'est jamais algébrique et, en général, est transcendant.

Corollaire I. — *Le produit de λ fonctions* (1) $F(x), F_1(x), \ldots, F_{\lambda-1}(x)$ *de l'ensemble* E, *sans lacunes, au moins à partir d'un certain terme, ou pour lesquelles $p_\nu p'_\nu \ldots p_\nu^{(\lambda-1)} \neq 0$ pour une infinité de valeurs de ν, ne prend, pour x rationnel, que des valeurs transcendantes; il en est de même pour les fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ renfermant une infinité de polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ dont les coefficients sont tous de même signe dans chaque polynome, quand x est réel et > 0; les fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ pour lesquelles les coefficients d'une infinité des polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ ont leurs modules limités ne prennent pour x rationnel, avec $|x| > x_1$ (x_1 positif limité), que des valeurs transcendantes.*

Corollaire II. — *Les fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ où tous les coefficients des $\psi_\nu^{(i)}(x)$ sont nuls ou positifs, c'est-à-dire les fonctions $\gamma^{(\lambda)}(x)$, ne*

---

(1) $|p_\nu|, \quad \ldots, \quad |p_\nu^{(\lambda-1)}| \leqq e_k(\nu)^{\nu\varepsilon_2}.$

prennent, pour x rationnel et positif, que des valeurs transcendantes.

C'est, en particulier, le cas des produits λ à λ des fonctions du sous-ensemble E'.

Les produits λ à λ des nombres du sous-ensemble $H'^{(2)}$ (p. 306) *sont transcendants.*

La somme arithmétique d'un nombre quelconque de $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ $\left(\frac{p}{q}\text{ rationnel} > 0\right)$ est de la même forme et est un nombre transcendant. Le produit d'un nombre quelconque λ_1 de $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est de la forme $\gamma^{(\lambda_1\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ et est un nombre transcendant.

Pour obtenir tous les $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$, p et q variant, mais p et q restant limités et positifs, on remarque que $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{p'}{q'}\right) = \gamma^{(\lambda)}\left(\frac{q}{p}\,\frac{p'}{q'}\,\frac{p}{q}\right)$. C'est la valeur pour $x = \frac{p}{q}$ de $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{q}{p}\,\frac{p'}{q'}\,x\right)$. Il suffira donc, pour avoir toutes ces valeurs $\gamma^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$, d'attribuer à $\frac{p}{q}$ une valeur arbitraire, 1 par exemple, dans les fonctions d'un ensemble analogue à celui des $\gamma^{(\lambda)}(x)$, et le comprenant. Les mêmes propriétés restent vraies pour les nombres $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$.

Théorème VI. — *Par addition, soustraction ou multiplication, les nombres $g^{(\lambda)}(x)$ (où x prend toute valeur rationnelle, réelle ou non), en particulier les nombres de* E, *ne peuvent donner que des nombres transcendants, ou, exceptionnellement, rationnels. Dans ce dernier cas, les polynomes $\psi_\nu^{(i)}(x)$ de la fonction génératrice correspondante doivent tous s'annuler pour la valeur rationnelle de x considérée, quand $\nu > \nu_1$.*

Par addition ou multiplication, les nombres $\gamma^{(\lambda)}(x)$ (où x prend toute valeur rationnelle réelle positive), qui sont transcendants quand $\gamma^{(\lambda)}(x)$ n'est pas un polynome, en particulier les nombres de E', *ne peuvent donner que des nombres transcendants.*

Pour obtenir tous les nombres transcendants que peuvent donner pour les valeurs rationnelles de x toutes les fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ ou

$\gamma^{(\lambda)}(x)$ (*avec* $x > 0$), *correspondant à une même valeur de* k, ρ *et* λ, *il suffit de donner à* x, *dans l'ensemble de ces fonctions, une valeur rationnelle arbitraire, la valeur* 1 *par exemple.*

On peut faire application de ces deux théorèmes aux produits des nombres engendrés par les fonctions quasi-entières. Reprenons les fonctions quasi-entières et les nombres considérés au théorème III : $a_1, a_2, \ldots, a_\theta$ étant des nombres rationnels donnés (et négatifs), et $F, F_1, \ldots$ étant des fonctions de E' (p. 306), $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ appartient à $\sum H'_{11}$. Tout nombre engendré par un produit de λ fonctions quasi-entières de la même forme que $\varphi(x)$, et correspondant à des valeurs de $a_1, \ldots, a_\theta$ différentes ou non, en même nombre ou non, mais négatives, appartient alors à $\sum \gamma^{(\lambda)}(1)$.

Théorème VII. — *Soient, comme au théorème III,* $F(x), F_1(x), \ldots$ *des fonctions appartenant aux sous-ensembles* $\Sigma E'$; $a_1, a_2, \ldots, a_\theta$; $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\theta'}$; ... *toutes les suites quelconques de nombres négatifs rationnels, et les fonctions quasi-entières*

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\qquad + F_2\left(\frac{1}{x-a_1}\right) + \ldots + F_{\theta+1}\left(\frac{1}{x-a_\theta}\right), \\ \varphi^{(1)}(x) &= F^{(1)}(x) + F_1^{(1)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\qquad + F_2^{(1)}\left(\frac{1}{x-a'_1}\right) + \ldots + F_{\theta'+1}^{(1)}\left(\frac{1}{x-a_{\theta'}}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Par addition ou multiplication, les nombres $\varphi(x)$, $\varphi^{(1)}(x)$, ... (x *prenant toute valeur rationnelle positive* > 0), *qui sont transcendants, ne peuvent donner que des nombres transcendants.*

Ces nombres sont d'ailleurs compris parmi les nombres $\gamma^{(\lambda)}(x)$ *du théorème VI précédent qui correspondent au même indice* k.

Tout polynome à coefficients rationnels positifs formé avec ces nombres est un nombre transcendant.

Nous venons d'obtenir ainsi des résultats tout à fait complets pour

le produit des fonctions $F(x)$ de E ou de E′, quand ces ensembles E ou E′ sont d'indices $\geqq 3$. Mais les fonctions entières les plus usuelles sont d'indice < 3, et il serait bien intéressant d'obtenir aussi à l'égard de leurs produits quelques résultats, fussent-ils moins complets.

Nous allons considérer les fonctions et les nombres des sous-ensembles E′ et H′ quand l'indice $k = 2$, et les nombres analogues pour $k \leqq 1$, c'est-à-dire les nombres déduits de $F(x)$ pour x rationnel > 0, quand $k \leqq 1$, les coefficients de $F(x)$ étant tous positifs :

$$F_1\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1}\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p_m}{q_m}\left(\frac{p}{q}\right)^m + R_m^{(1)} = S_m^{(1)} + R_m^{(1)},$$

$$F_2\left(\frac{p}{q}\right) = S_m^{(2)} + R_m^{(2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

avec $\frac{p}{q}$ réel, $S_m^{(1)} = \frac{M_m^{(1)}}{q_m q^m}$, ... Soit ($A_1$, B_1 entiers)

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{A_1}{B_1} &= F_1\left(\frac{p}{q}\right)F_2\left(\frac{p}{q}\right)\cdots F_\lambda\left(\frac{p}{q}\right) \\ &= S_m^{(1)}S_m^{(2)}\ldots S_m^{(\lambda)}\left(1 + \frac{R_m^{(1)}}{S_m^{(1)}} + \ldots + \frac{R_m^{(\lambda)}}{S_m^{(\lambda)}} + \prod \frac{R_m^{(j)}R_m^{(l)}}{S_m^{(j)}S_m^{(l)}} + \ldots\right), \end{aligned}\right.$$

$$S_m^{(1)}S_m^{(2)}\ldots S_m^{(\lambda)} = \frac{M_m^{(1)}M_m^{(2)}\ldots M_m^{(\lambda)}}{q_m^\lambda q^{m\lambda}};$$

$$(22)\qquad A = \left| F_1\left(\frac{p}{q}\right)\cdots F_\lambda\left(\frac{p}{q}\right) - S_m^{(1)}\ldots S_m^{(\lambda)}\right| \geqq \frac{1}{B_1 q_m^\lambda q^{m\lambda}}.$$

Or

$$\frac{R_m^{(1)}}{S_m^{(1)}} \leqq 2\alpha_1 \frac{p_{m+1}^{(1)}}{q_{m+1}^{(1)}}\left(\frac{p}{q}\right)^{m+1} \qquad (\alpha_1 \text{ fini}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

d'après le corollaire IV du théorème I. Le nombre des termes du second membre de (21) étant fini,

$$\frac{1}{B_1 q_m^\lambda q^{m\lambda}} \leqq A \leqq \beta\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{(m+1)\lambda}\frac{p_{m+1}^{(1)} + \ldots + p_{m+1}^{(\lambda)}}{q_{m+1}}\right] \text{ (1)} \qquad (\beta \text{ fini}),$$

$$q_{m+1} \leqq \frac{\beta_1 p^{(m+1)\lambda}}{q^\lambda}(p_{m+1}^{(1)} + \ldots + p_{m+1}^{(\lambda)})q_m^\lambda.$$

---

(1) Ceci suppose $\frac{p}{q} \geqq 1$: si $\frac{p}{q} < 1$, on remplacera $\left(\frac{p}{q}\right)^{(m+1)\lambda}$ par 1 : le raisonnement est le même.

Si ceci est impossible, le produit du second membre de (21) sera irrationnel. Soit $p_{m+1}^{(1)} \leqq e_{k-1}(m+1)^{\tau(m+1)}, \ldots, p_{m+1}^{(\lambda)} \leqq e_{k-1}(m+1)^{\tau(m+1)}$; il faut

$$e_k(m+1)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(m+1)} \leqq \gamma p^{(m+1)\lambda} e_{k-1}(m+1)^{\tau(m+1)} e_k(m)^{\lambda\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1\right)m},$$

$$\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(m+1)e_{k-1}(m+1) \leqq \log\gamma + (m+1)\lambda\log p$$
$$+ \tau(m+1)e_{k-2}(m+1)$$
$$+ \lambda m\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)e_{k-1}(m).$$

Pour $k=2$, ceci n'est impossible que si $\lambda \leqq 2$. Pour $k \leqq 1$, il n'y a pas impossibilité (¹). Donc, quand $k \leqq 2$, la seule conclusion que nous puissons tirer est la suivante :

Théorème VIII. — *Le produit de deux fonctions entières ou quasi-entières quelconques d'indice 2 considérées au théorème III prend pour x rationnel positif ($a_j < 0$) des valeurs irrationnelles. Le produit de deux nombres de $H'^{(2)}$, quand $H'^{(2)}$ est d'indice 2, est irrationnel, comme chacun de ces nombres.*

§ VI. 3° *Quotients de fonctions de* E *ou de* ΣE. — *Nombres méromorphes.*

Le quotient

$$\frac{F(x)F_1(x)\ldots F_\lambda(x)}{F^{(1)}(x)F_1^{(1)}(x)\ldots F_\lambda^{(1)}(x)},$$

où quelques-unes des fonctions F ou $F^{(1)}$ peuvent se réduire à l'unité, soit au numérateur, soit au dénominateur, est une fonction méromorphe de la forme

$$\frac{g^{(\lambda)}(x)}{g_1^{(\lambda)}(x)} = L^{(\lambda)}(x).$$

Nous dirons que tout quotient de deux fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ est *une*

(¹) Les raisonnements restent vrais, *a fortiori*, si les fonctions considérées $F(x)$, $F_1(x)$, ... présentent des lacunes ($p_{m+1} = \ldots = p_{m+\mu-1} = 0$, p_m, $p_{m+\mu} \neq 0$, par exemple).

fonction méromorphe issue de l'ensemble $g^{(\lambda)}(x)$, *ou une fonction méromorphe* $L^{(\lambda)}(x)$.

Considérons le nombre

$$L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)}{g_1^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Nous dirons que c'est *un nombre méromorphe*.

Premier cas : $\lambda = 1$. — Soient des fonctions $F(x)$, $F_1(x)$ analogues à celles envisagées au théorème II, et auxquelles le corollaire IV du théorème I est applicable :

$$L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{F\left(\frac{p}{q}\right)}{F_1\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{N + R_m}{N_1 + R_m^{(1)}} \quad (^1),$$

$$N = \sum_0^m a_m \left(\frac{p}{q}\right)^m, \qquad N_1 = \sum_0^m a_m^{(1)} \left(\frac{p}{q}\right)^m, \qquad \frac{p}{q} \neq 0.$$

Admettons d'abord que $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ soit rationnel et $= \frac{A}{B}$ (A, B entiers). On a

$$AN_1 + AR_m^{(1)} = BN + BR_m,$$
$$AN_1 - BN = BR_m - AR_m^{(1)},$$
$$q_m q^m (AN_1 - BN) = q_m q^m (BR_m - AR_m^{(1)}).$$

Le premier membre est entier, le second doit l'être; il est nul quel que soit m, ou $\geqq 1$ pour une infinité de valeurs de m, dès que $m > \mu$.

S'il est nul (²),

$$BR_m - AR_m^{(1)} = 0,$$

(¹) Nous n'étudions ici que les nombres $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ issus du quotient $\frac{F(x)}{F_1(x)}$ de deux fonctions de l'ensemble E (p. 304).

(²) On remarquera que, A et B étant donnés, les raisonnements resteraient vrais si $F(x)$ et $F_1(x)$ étaient des polynomes d'un nombre assez grand de termes jouissant, dès que $m > \mu$, des propriétés que nous supposons pour les termes de F et F_1; ou encore si les séries F, F_1 présentent des lacunes.

dès que $m > \mu$. Alors

$$BR_{m+1} - AR^{(1)}_{m+1} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Donc, retranchant membre à membre chacune de ces inégalités de celle qui la précède,

$$Bu_{m+1} - Au^{(1)}_{m+1} = 0,$$
$$Bu_{m+2} - Au^{(1)}_{m+2} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ou

$$Ba_{m+1} - Aa^{(1)}_{m+1} = 0, \qquad B(\pm p_{m+1}) - A(\pm p^{(1)}_{m+1}) = 0,$$
$$Ba_{m+2} - Aa^{(1)}_{m+2} = 0, \qquad B(\pm p_{m+2}) - A(\pm p^{(1)}_{m+2}) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On aurait, pour $m > \mu$,

$$\frac{A}{B}\sum_{m+1}^{\infty} a^{(1)}_n x^n = \sum_{m+1}^{\infty} a_n x^n,$$
$$F(x) = P(x) + \lambda_1 F_1(x),$$

où λ_1 est rationnel, et $P(x)$ un polynome à coefficients rationnels,

$$L^{(1)}(x) = \frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{P(x)}{F_1(x)} + \lambda_1.$$

Quand $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ ne peut être rationnel que si $F_1\left(\frac{p}{q}\right)$ l'est; c'est-à-dire que $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est irrationnel dans les mêmes conditions que $F_1\left(\frac{p}{q}\right)$ ou $F\left(\frac{p}{q}\right)$, sauf pour les valeurs de $\frac{p}{q}$ qui rendent

$$L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right) = \lambda_1$$

(valeur exceptionnelle unique pour les nombres $L^{(1)}(x)$ où x rationnel $\neq 0$).

Nous pouvons donc admettre que, en général, pour une infinité de

valeurs de m,

$$q_m q^m |\mathrm{BR}_m - \mathrm{AR}_m^{(1)}| \geqq 1,$$

c'est-à-dire, *a fortiori*, puisque [le corollaire IV du théorème I étant supposé s'appliquer à $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{F}_1(x)$],

$$|\mathrm{R}_m| \leqq 2|a_{m+1}x^{m+1}|, \qquad |\mathrm{R}_m^{(1)}| \leqq 2|a_{m+1}^{(1)}x^{m+1}|,$$

$$2q_m q^m\left(\mathrm{B}\frac{|p_{m+1}|}{q_{m+1}} + \mathrm{A}\frac{|p_{m+1}^{(1)}|}{q_{m+1}}\right)\left|\frac{p}{q}\right|^{m+1} \geqq 1.$$

Posant

$\frac{q_{m+1}}{q_m} = \psi_{m+1}$ (ψ_{m+1} croissant indéfiniment avec m par hypothèse) :

$$(23) \qquad \frac{2|p|^{m+1}}{q}(\mathrm{B}|p_{m+1}| + \mathrm{A}|p_{m+1}^{(1)}|) \geqq \psi_{m+1}.$$

Nous retiendrons seulement ces conséquences : 1° si $p = 1$, cette inégalité sera toujours impossible pour un mode de croissance assez lent des $|p_{m+1}|$, $|p_{m+1}^{(1)}|$; 2° si $|p|$ quelconque, il suffira que $\psi_{m+1} = \chi_m^m$ (χ_m fonction constamment croissante de m absolument quelconque) pour que cette inégalité soit impossible pour un mode de croissance assez lent des $|p_{m+1}|$, $|p_{m+1}^{(1)}|$. En particulier, prenons (¹)

$$|p_n| \leqq e_{k-1}(n)^{\tau n}, \qquad |a_n| = e_k(n)^{-n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} \qquad (\rho \text{ et } \tau \text{ fixes});$$

alors

$$q_n = e_k(n)^{n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right)},$$

car

$$|p_n| = e_k(n)^{\varpi} \leqq e_{k-1}(n)^{\tau n},$$

et

$$\varpi e_{k-1}(n) \leqq \tau n\, e_{k-2}(n),$$

en sorte que ϖ tend vers zéro quand n croît indéfiniment;

$$\left|\frac{q_{m+1}}{q_m}\right| = \frac{e_k(m+1)^{(m+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon''\right)}}{e_k(m)^{m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right)}} = \psi_{m+1} = \chi_m^m,$$

$$(m+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon''\right)e_{k-1}(m+1) - m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right)e_{k-1}(m) = m\log\chi_m.$$

(¹) Pour $k \geqq 3$ on peut prendre $|p_n| \leqq e_k(n)^{\varepsilon_1 n}$.

Dès que $k \geqq 2$, χ_m croît indéfiniment, et $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est irrationnel.

Un exemple simple d'application de ce qui précède est celui du quotient

$$L^{(1)}(x) = \frac{\eta_0 + \frac{\eta_1 x}{1} + \frac{\eta_2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\eta_n x^n}{n!} + \ldots}{\eta_0^{(1)} + \frac{\eta_1^{(1)} x}{1} + \frac{\eta_2^{(1)} x^2}{2!} + \ldots + \frac{\eta_n^{(1)} x^n}{n!} + \ldots},$$

où les η_n, $\eta_n^{(1)}$ sont égaux à ± 1 ; sauf si $\eta_n \eta_n^{(1)}$ conserve un signe constant dès que n est supérieur à une certaine limite, $L^{(1)}\left(\frac{1}{q}\right)$ est irrationnel.

Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

Théorème IX. — *Soient* $F(x)$, $F_1(x)$ *deux fonctions entières* (*de l'ensemble* E, p. 304), *et* $f(x) = \frac{F(x)}{F_1(x)}$,

$$F(x) = \sum_0^\infty \pm \frac{p_n}{q_n} x^n, \qquad F_1(x) = \sum_0^\infty \pm \frac{p_n^{(1)}}{q_n} x^n,$$

p_n, $p_n^{(1)}$, q_n *étant des entiers*, $|p_n|$, $|p_n^{(1)}|$ *ayant leur croissance suffisamment lente, et* $\frac{q_{n+1}}{q_n}$, *entier, croissant constamment et indéfiniment avec* n (q_n *réel et positif*).

Si l'on n'a pas $F(x) - \lambda_1 F_1(x) = P(x)$ [λ_1 *constante rationnelle*, $P(x)$ *polynome*] :

1° $f\left(\frac{1}{q}\right)$ *est irrationnel* (q *entier quelconque*);

2° *Si* $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ *croît suffisamment vite avec* n (*au moins aussi vite que* χ_m^m, *où* χ_m *est une fonction constamment croissante de* m, *d'ailleurs quelconque*), $f\left(\frac{p}{q}\right)$ *est irrationnel* (p, q *entiers quelconques*, p *positif, négatif ou imaginaire*; q *positif*). *Ce sera le cas quand* $q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)^n}$, ($k \geqq 2$), $p_n \leqq e_{k-1}(n)^{\tau n}$, ($\tau$ *fini*).

Si l'on a $F(x) - \lambda_1 F_1(x) = P(x)$, $f(x)$ *est irrationnel quand* $F(x)$ *l'est, sauf pour les valeurs rationnelles de* x *qui annulent* $P(x)$, *et rendent* $f(x)$ *égal à* λ_1.

On établira de même que, sous certaines conditions, $f\left(\frac{p}{q}\right) = L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est transcendant. En effet, supposons que

$$L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right) = A = \frac{N + R_m}{N_1 + R_m^{(1)}}$$

soit algébrique et non rationnel, de degré $\alpha > 1$. On a

$$AN_1 - N = R_m - AR_m^{(1)}.$$

D'abord, dès que $m > \mu$, on ne peut avoir constamment

$$R_m - AR_m^{(1)} = 0,$$

sans quoi

$$R_{m+1} - AR_{m+1}^{(1)} = 0, \qquad u_{m+1} - Au_{m+1}^{(1)} = 0,$$

ce qui est absurde, puisque u_{m+1} et $u_{m+1}^{(1)}$ sont rationnels. Il y a une infinité de valeurs de m telles que $R_m - AR_m^{(1)} \neq 0$.

Ceci posé, on a (propriété I),

$$AN_1 - N = N_1\left(A - \frac{N}{N_1}\right),$$

$$\left|A - \frac{N}{N_1}\right| = \left|A - \frac{q_m q^m N}{q_m q^m N_1}\right| \geqq \frac{1}{M|q_m q^m N_1|^\alpha} \qquad (M \text{ fini}),$$

$$|N_1| = \left|F_1\left(\frac{p}{q}\right)(1+\varepsilon)\right| \leqq M_1 \qquad (M_1 \text{ fini}),$$

dès que m est assez grand.

$$|AN_1 - N| \geqq |N_1| \frac{1}{Mq^{m\alpha}q_m^\alpha |N_1|^\alpha} = \frac{1}{Mq^{m\alpha}q_m^\alpha |N_1|^{\alpha-1}},$$

$$|AN_1 - N| \geqq \frac{1}{M_2 q^{m\alpha} q_m^\alpha}, \qquad M_2 = M|N_1|^{\alpha-1}.$$

D'autre part,

$$|R_m - AR_m^{(1)}| \leqq 2(|a_{m+1}| + |a_{m+1}^{(1)}|)\left|\frac{p}{q}\right|^{m+1} M_3, \qquad M_3 \text{ fini},$$

$$\leqq 2\frac{|p_{m+1}| + |p_{m+1}^{(1)}|}{q_{m+1}} \frac{|p|^{m+1}}{q^{m+1}} M_3.$$

Il faudra donc

$$\frac{1}{M_2 q^{m\alpha} q_m^{\alpha}} \leqq 2 \frac{|p_{m+1}| + |p_{m+1}^{(1)}|}{q_{m+1}} \frac{|p|^{m+1}}{q^{m+1}} M_3,$$

ou

$$q_{m+1} \leqq \frac{2 M_2 M_3}{q} (|p_{m+1}| + |p_{m+1}^{(1)}|) |p|^{m+1} q_m^{\alpha} q^{m(\alpha-1)}.$$

Il est dès lors évident que, la croissance des $|p_{m+1}|$ et $|p_{m+1}^{(1)}|$ étant donnée, on peut prendre celle des q_m assez rapide pour que cette inégalité soit impossible pour m assez grand, et même impossible quels que soient α, p, q.

Prenons $|p_n|$ et $|p_m^{(1)}| \leqq e_k(n)^{\varepsilon_1 n}$ (ε_1 aussi petit qu'on veut), $|a_n|$, $|a_n^{(1)}|$ de la forme $e_k(n)^{-n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}$, avec $k \geqq 3$. On a encore, comme tout à l'heure (p. 326),

$$q_n = e_k(n)^{n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right)}.$$

De même

$$\frac{2 M_2 M_3}{q} |p|^{m+1} q^{m(\alpha-1)} = e_k(m)^{\varpi_1 m},$$

et ϖ_1 tend vers o quand m croît indéfiniment. Il faudrait ainsi

$$e_k(m+1)^{(m+1)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1\right)} \leqq e_k(m)^{m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_2\right)\alpha},$$

ce qui est absurde d'après le lemme I.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Théorème X. — *Tout étant posé comme au théorème IX ci-dessus, si* $|a_n|$, $|a_n^{(1)}|$, q_n *sont de la forme* $e_k(n)^{-n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}$ (ρ *fini*, $k \geqq 3$), $|p_n|$ *et* $|p_n^{(1)}|$ *au plus égaux à* $e_{k-1}(n)^{\tau n}$ (τ *fini*), $f\left(\frac{p}{q}\right)$ *est transcendant, à moins que* $F(x) - \lambda_1 F_1(x) = P(x)$.

Dans ce dernier cas, $f(x)$ *est rationnel pour les valeurs rationnelles de* x *qui annulent* $P(x)$, *transcendant pour les autres (sauf* $x = 0$*);* $f(x)$ *ne peut prendre, en dehors de* $f(0)$, *qu'une*

valeur rationnelle au plus (¹). *Pour* $k \geqq 3$, $f(x)$ *n'est jamais algébrique pour* x *rationnel.*

On peut aussi énoncer ces deux théorèmes de la manière suivante en se bornant au cas où $k \geqq 2$:

Théorème XI. — *Soit le quotient* $L^{(1)}(x)$ *de deux fonctions* $F(x)$, $F_1(x)$ *de l'ensemble* E, *qui ne sont pas liées par une relation de la forme* $F(x) - \lambda_1 F_1(x) = P(x)$: *si* $k \geqq 2$, $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ *est irrationnel* (²); *si* $k \geqq 3$, *il est transcendant.*

On obtient tous les nombres $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$ *correspondant à une valeur de* k *et à l'ensemble* ΣE *en donnant à* $\frac{p}{q}$ *une valeur unique,* 1 *par exemple, dans les fonctions de* $\Sigma L^{(1)}(x)$.

Le quotient de deux nombres quelconques du sous-ensemble H'_{pq} (p. 306), *qui est un nombre* $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$, *est respectivement irrationnel ou transcendant, à moins que* $F(x) - \lambda F_1(x) = P(x)$.

Les résultats précédents comportent déjà des applications aux fonctions quasi-méromorphes. Exemple :

$$\frac{F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right)}{F^{(1)}(x) + F_1^{(1)}\left(\frac{1}{x}\right)},$$

quel que soit k, sera irrationnel pour $x = 1$, si l'on n'a pas

$$F(x) + F_1(x) - \lambda_1 [F^{(1)}(x) + F_1^{(1)}(x)] = P(x),$$

et si $F(x) + F_1(x)$, $F^{(1)}(x) + F_1^{(1)}(x)$ ne sont pas simultanément des polynomes.

(¹) Ce cas exceptionnel peut évidemment se présenter, et l'énoncé du théorème indique à quelles conditions nécessaires et suffisantes.

(²) Il est bien entendu que nous laissons ici les nombres transcendants parmi les nombres irrationnels.

La considération des fonctions θ, θ_1, θ_2, θ_3 de Jacobi [formule (18), p. 308, r entier > 1] nous fournit une application plus particulière.

Prenons

$$\frac{\theta_2(1)}{\theta_3(1)} = \frac{1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n r^{-n^2}}{1 + 2\sum_1^\infty r^{-n^2}}, \qquad r \text{ entier réel} > 1.$$

Ici

$$F(x) = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n r^{-n^2} x^n,$$

$$F_1(x) = 1 + 2\sum_1^\infty r^{-n^2} x^n.$$

$F(x) - \lambda_1 F_1(x)$ n'est pas un polynome;

$$|p_n| = |p_n^{(1)}| = 2,$$

$\frac{q_{n+1}}{q_n} = r^{2n+1}$ croît indéfiniment avec n. Donc $\frac{\theta_2(1)}{\theta_3(1)}$ est irrationnel d'après (23) (p. 326). De même $r^{\frac{1}{4}}\frac{\theta_1(1)}{\theta_3(1)}$ (¹); de même encore $\frac{\theta_3''(1)}{\theta_3(1)}$, $\frac{\theta_3'''(1)}{\theta_3(1)}$, ..., car, par exemple, on a

$$\theta_3''(1) = \sum_1^\infty r^{-n^2}[2n(2n-1) + 2n(2n+1)] = \sum_1^\infty 8n^2 r^{-n^2},$$

(¹) Si l'on pose

$$\frac{\lambda'(u)}{\sqrt{[1-\lambda^2(u)][1-k_1^2\lambda^2(u)]}} = g, \qquad \lambda(u) = \pm sn\, gu,$$

$\frac{\theta_1(1)}{\theta_3(1)}$ est la valeur de $\sqrt{k_1}$ (JORDAN, *Analyse*, t. II, 1883, p. 387). Il faut avoir soin, dans le *Cours d'Analyse* imprimé de M. Jordan, de permuter les indices de θ, θ_1, θ_2, de façon à y remplacer θ par θ_2, θ_1 par θ, θ_2 par θ_1.

Nous rappelons que $r = e^{-\pi i\tau}$, $\frac{2\omega_2}{2\omega_1} = \tau$. Ici r est supposé entier réel, $\tau = \alpha i$ (α réel). Si $r = r_1^4$ (r_1 entier), $\sqrt{k_1}$ est irrationnel.

et

$$\sum_{1}^{\infty} 8n^2 r^{-n^2} x^n - \lambda_1 F_1(x)$$

ne se réduit pas à un polynome.

Corollaire. — *Soient* $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ [*formules* (18), *p.* 308] *les quatre fonctions* θ *de Jacobi :* $\frac{\theta_2(1)}{\theta_3(1)}$, $r^{\frac{1}{4}}\frac{\theta_1(1)}{\theta_3(1)}$, $\frac{\theta_3''(1)}{\theta_3(1)}$, $\frac{\theta_3'''(1)}{\theta_3(1)}$, $\cdots$ *sont des irrationnelles* (r *entier* > 1).

Plus généralement, prenons la fonction $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, où $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont des fonctions quasi-entières comme celles considérées au théorème III (p. 307). On sait (¹) que $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ est de la même forme que $F\left(\frac{p}{q}\right)$; de même $\varphi_1\left(\frac{p}{q}\right)$. Ce rapport $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ est irrationnel quand $k = 2$, transcendant quand $k \geqq 3$, $\left(x = \frac{p}{q}\right)$, si $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ ne satisfait pas à une condition particulière exigeant entre les coefficients de $\varphi(x)$ et de $\varphi_1(x$ une infinité dénombrable de relations. On peut énoncer une partie de la propriété corrélative sous cette forme :

Théorème XII. — *Soient, comme au théorème III, toutes les fonctions quasi-entières*

$$\varphi(x) = F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right) + F_2\left(\frac{1}{x - a_1}\right) + \ldots + F_{\theta+1}\left(\frac{1}{x - a_\theta}\right),$$

$a_1, \ldots, a_\theta$ *étant des quantités rationnelles et négatives, en nombre fini quelconque* (*une au moins de ces fonctions étant* $\neq 0$, *et alors ne se réduisant pas à un polynome*), $F(x)$, $F_1(x)$, $\ldots$, $F_{\theta+1}(x)$ *des fonctions de l'ensemble* E′ (*p.* 306).

Soit N *l'ensemble des nombres irrationnels* ($k = 2$) *ou transcendants* ($k \geqq 3$) *obtenus en donnant à* x *des valeurs rationnelles* > 0 *dans* $\varphi(x)$. *Le quotient de deux nombres de* N *est en général un nombre irrationnel si* $k = 2$, *transcendant si* $k \geqq 3$: *le contraire ne pourra se produire que si les deux fonctions génératrices* $\varphi(x)$,

(¹) Ici p, q sont réels et positifs, $p_n \leqq e_1(n)^{\tau n}$ pour $k = 2$, $p_n < e_k(n)^{\varepsilon n}$ pour $k > 3$.

$\varphi_1(x)$ correspondantes ont entre leurs coefficients une infinité dénombrable de relations particulières. En tout cas, pour $k \geqq 3$, ce quotient n'est pas algébrique.

On peut préciser davantage la portée de ce théorème, et établir ce résultat :

Théorème XIII. — *Soit la fonction quasi-méromorphe* Q *obtenue en divisant deux des fonctions $\varphi(x)$ l'une par l'autre ($a_1, \ldots, a_\theta$ quantités rationnelles* quelconques *différentes et $\neq 0$). Si* Q *ne se réduit pas à une constante ou à une fraction rationnelle, parmi les valeurs en nombre infini que* Q *prend pour x rationnel* quelconque, *il n'y en a en général* [1] *qu'un nombre fini qui puissent n'être pas irrationnelles pour $k = 2$, transcendantes pour $k \geqq 3$; ces valeurs exceptionnelles sont alors rationnelles.*

En effet, on a, si $a_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \cdots$ ($\alpha_1, \beta_1, \ldots$, entiers),

$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \sum \pm \frac{p_m}{q_m}\frac{p^m}{q^m} \pm \frac{p_m^{(1)}}{q_m}\left(\frac{q}{p}\right)^m \pm \frac{p_m^{(2)}}{q_m}\frac{(\beta_1 q)^m}{(p\beta_1 - \alpha_1 q)^m} \pm \ldots = \sum u_m, \\ \varphi_1\left(\frac{p}{q}\right) = \sum \pm \frac{\varpi_m}{q_m}\frac{p^m}{q^m} \pm \frac{\varpi_m^{(1)}}{q_m}\left(\frac{q}{p}\right)^m \pm \frac{\varpi_m^{(2)}}{q_m}\frac{(\beta_1 q)^m}{(p\beta_1 - \alpha_1 q)^m} \pm \ldots = \sum u_m^{(1)}. \end{cases}$$

Nous savons déjà que, $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\varphi_1\left(\frac{p}{q}\right)$ pouvant être mis sous une forme analogue à celle de $F\left(\frac{p}{q}\right)$, leur quotient n'est jamais algébrique (théorème X, p. 329), quand $k \geqq 3$.

Supposons ce quotient rationnel pour $x = \frac{p}{q}$.

Dès que m est assez grand, il faudra, pour que $\frac{\varphi\left(\frac{p}{q}\right)}{\varphi_1\left(\frac{p}{q}\right)}$ soit rationnel et $= \lambda_1$, que (raisonnement identique à celui de la page 325)

$$P_m - \lambda_1 P_m^{(1)} = 0,$$

---

[1] Par exemple si une des $2\theta + 4$ fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_{\theta+1}(x)$, $F^{(1)}(x)$, ..., $F_{\theta+1}^{(1)}(x)$ ne présente pas de lacunes à partir d'un certain terme.

quel que soit m, avec

$$\begin{cases} P_m = u_m\, q_m q^m p^m (p\beta_1 - \alpha_1 q)^m \ldots, \\ P_m^{(1)} = u_m^{(1)} q_m q^m p^m (p\beta_1 - \alpha_1 q)^m \ldots, \end{cases}$$

ou encore

$$(\pm p_m \mp \lambda_1 \varpi_m)\frac{p^m}{q^m} + (\pm p_m^{(1)} \mp \lambda_1 \varpi_m^{(1)})\frac{q^m}{p^m}$$
$$+ (\pm p_m^{(2)} \mp \lambda_1 \varpi_m^{(2)})\frac{(\beta_1 q)^m}{(p\beta_1 - \alpha_1 q)^m} + \ldots = 0.$$

Le nombre des coefficients p_m, ϖ_m, $p_m^{(1)}$, $\varpi_m^{(1)}$, ... qui entrent dans cette relation est $2(\theta + 2)$.

Si alors il y avait au moins $2(\theta + 2)$ relations de ce genre, c'est-à-dire au moins $2(\theta + 2)$ valeurs différentes $\frac{p}{q} \neq 0$ donnant à $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ des valeurs rationnelles distinctes λ_1, λ_2, ..., le déterminant des relations correspondantes entre les p_m, ϖ_m, ... devrait s'annuler, puisque p_m, ϖ_m, $p_m^{(1)}$, ... ne sont pas tous nuls, au moins pour une infinité de valeurs de m, les fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... n'étant pas supposées toutes des polynomes. On aurait ainsi, dès que m dépasse une certaine limite,

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{p^m}{q^m} & -\lambda_1 \frac{p^m}{q^m} & \frac{q^m}{p^m} & -\lambda_1 \frac{q^m}{p^m} & \frac{(\beta_1 q)^m}{(p\beta_1 - \alpha_1 q)^m} & \frac{-\lambda_1(\beta_1 q)^m}{(p\beta_1 - \alpha_1 q)^m} & \ldots \\ \frac{p_1^m}{q_1^m} & -\lambda_2 \frac{p_1^m}{q_1^m} & \frac{q_1^m}{p_1^m} & -\lambda_2 \frac{q_1^m}{p_1^m} & \frac{(\beta_1 q_1)^m}{(p_1\beta_1 - \alpha_1 q_1)^m} & \frac{-\lambda_2(\beta_1 q_1)^m}{(p_1\beta_1 - \alpha_1 q_1)^m} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

pour une infinité de valeurs de m (consécutives s'il n'y a pas de lacunes), ou, en posant, pour simplifier, $\frac{p_i}{q_i} = \gamma_{i+1}$,

$$\Delta_{2\theta+1}^{(m)} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \lambda_1 \gamma_1^m & \frac{1}{\gamma_1^m} & \frac{\lambda_1}{\gamma_1^m} & \frac{1}{(\gamma_1 - a_1)^m} & \frac{\lambda_1}{(\gamma_1 - a_1)^m} & \ldots \\ \gamma_2^m & \lambda_2 \gamma_2^m & \frac{1}{\gamma_2^m} & \frac{\lambda_2}{\gamma_2^m} & \frac{1}{(\gamma_2 - a_1)^m} & \frac{\lambda_2}{(\gamma_2 - a_1)^m} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

C'est un déterminant à $2(\theta + 2)$ lignes et colonnes, dont nous allons obtenir la valeur.

D'abord, pour $\theta = -1$, ce déterminant se réduit à

$$\begin{vmatrix} \gamma_1^m & \lambda_1\gamma_1^m \\ \gamma_2^m & \lambda_1\gamma_2^m \end{vmatrix} = \gamma_1^m\gamma_2^m(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Il y a au plus une valeur de $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ qui soit rationnelle [1] (théorèmes IX et X). Voyons le cas général.

Le déterminant

$$\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{2n} \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n}^1 & a_{2n}^2 & \dots & a_{2n}^{2n} \end{vmatrix}$$

est une somme algébrique de termes de la forme

$$(24) \qquad \pm \begin{vmatrix} a_{i_1}^1 & a_{i_1}^2 \\ a_{i_2}^1 & a_{i_2}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{i_3}^3 & a_{i_3}^4 \\ a_{i_4}^3 & a_{i_4}^4 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_{i_{2n-1}}^{2n-1} & a_{i_{2n-1}}^{2n} \\ a_{i_{2n}}^{2n} & a_{i_{2n}}^{2n} \end{vmatrix},$$

$i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_{2n}$; le premier de ces déterminants d'ordre deux est formé avec des éléments des deux premières colonnes appartenant deux à deux à une même ligne, et ainsi de suite. On aura alors

$$\Delta_{2\theta+4}^{(m)} = \sum \pm \begin{vmatrix} \gamma_{i_1}^m & \lambda_{i_1}\gamma_{i_1}^m \\ \gamma_{i_2}^m & \lambda_{i_2}\gamma_{i_2}^m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\gamma_{i_3}^m} & \frac{\lambda_{i_3}}{\gamma_{i_3}^m} \\ \frac{1}{\gamma_{i_4}^m} & \frac{\lambda_{i_4}}{\gamma_{i_4}^m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma_{i_5} - a_1)^m} & \frac{\lambda_{i_5}}{(\gamma_{i_5} - a_1)^m} \\ \frac{1}{(\gamma_{i_6} - a_1)^m} & \frac{\lambda_{i_6}}{(\gamma_{i_6} - a_1)^m} \end{vmatrix} \dots$$

$$(25) \begin{cases} \Delta_{2\theta+4}^{(m)} = \sum \pm (\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1})(\lambda_{i_4} - \lambda_{i_3})\dots(\lambda_{i_{2\theta+4}} - \lambda_{i_{2\theta+3}}) \\ \qquad \times \dfrac{\gamma_{i_1}^m\gamma_{i_2}^m}{[\gamma_{i_3}\gamma_{i_4}(\gamma_{i_5} - a_1)(\gamma_{i_6} - a_1)\dots(\gamma_{i_{2\theta+3}} - a_0)(\gamma_{i_{2\theta+4}} - a_0)]^m}, \end{cases}$$

avec $\lambda_{i_j} - \lambda_{i_{j_1}} \neq 0$, $\gamma_{i_j} - \gamma_{i_{j_1}} \neq 0$ quand $j \neq j_1$.

Le nombre des termes de (24) dans $\Delta_{2\theta+4}^{(m)}$ est $\sigma = C_{2\theta+4}^2 C_{2\theta+2}^2 \dots C_4^2 C_2^2$.

Écrivons alors les équations (25) pour σ valeurs de m assez grandes

---

[1] Nous laissons, bien entendu, tout à fait de côté la valeur $x = 0$.

et consécutives, m, $m+\mu_1, \ldots, m+\mu_{\sigma-1}$, où l'on peut prendre, s'il n'y a pas de lacunes dans les fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, ..., ou si ces lacunes sont assez espacées, $\mu_1 = 1, \ldots, \mu_{\sigma-1} = \sigma - 1$; nous obtenons par rapport aux σ quantités $\Lambda = (\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1}), \ldots$, différentes ou non, σ équations linéaires homogènes qui ne peuvent être satisfaites qui si le déterminant des coefficients est nul; posons

$$(26) \qquad \frac{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}}{\gamma_{i_3}\gamma_{i_4}(\gamma_{i_5}-a_1)(\gamma_{i_6}-a_1)\ldots} = \delta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

On aura

$$\begin{vmatrix} \delta_1^m & \delta_2^m & \ldots & \delta_\sigma^m \\ \delta_1^{m+\mu_1} & \delta_2^{m+\mu_1} & \ldots & \delta_\sigma^{m+\mu_1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \delta_1^{m+\mu_{\sigma-1}} & \delta_2^{m+\mu_{\sigma-1}} & \ldots & \delta_\sigma^{m+\mu_{\sigma-1}} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exige

$$\Delta'_\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \delta_1^{\mu_1} & \delta_2^{\mu_1} & \ldots & \delta_\sigma^{\mu_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_1^{\mu_{\sigma-1}} & \delta_2^{\mu_{\sigma-1}} & \ldots & \delta_\sigma^{\mu_{\sigma-1}} \end{vmatrix} = 0$$

$$(0 < \mu_1 < \ldots < \mu_{\sigma-1}) \quad (^1).$$

---

(1) Δ'_σ n'est pas nul identiquement quels que soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$. Cette propriété est évidente pour $\sigma = 1$ ou 2; admettons-la pour $\sigma = \sigma' - 1$. Si $\Delta'_{\sigma'} = 0$ identiquement, $\Delta'_{\sigma'}$ est *a fortiori* nul pour $\delta_1 = 0$, et

$$\begin{vmatrix} \delta_2^{\mu_1} & \ldots & \delta_\sigma^{\mu_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_2^{\mu_{\sigma-1}} & \ldots & \delta_\sigma^{\mu_{\sigma-1}} \end{vmatrix} = \delta_2^{\mu_1}\ldots\delta_\sigma^{\mu_1} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \delta_2^{\mu_2-\mu_1} & \ldots & \delta_\sigma^{\mu_2-\mu_1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \delta_2^{\mu_{\sigma-1}-\mu_1} & \ldots & \delta_\sigma^{\mu_{\sigma-1}-\mu_1} \end{vmatrix} = 0$$

Mais le deuxième déterminant est un déterminant $\Delta'_{\sigma'-1}$, et l'on est conduit à une contradiction; donc $\Delta'_{\sigma'} \neq 0$.

Ceci posé, Δ'_σ est divisible par $\delta_i - \delta_j$ $(i \neq j)$. Δ'_σ s'écrira, en le supposant

Bornons-nous au cas où l'on peut prendre $\mu_l = l$. Alors

$$\Delta'_\sigma = \Pi(\delta_i - \delta_j) = 0 \qquad (i \neq j).$$

Écrivons toutes les équations

$$\delta_i - \delta_j = 0,$$

l'une d'elles doit être satisfaite. Ici δ_j diffère de δ_i [formules (26)], soit par le numérateur, soit, si les numérateurs sont identiques, par le dénominateur. Autrement dit, $\delta_i = \delta_j$ n'est pas une identité quand on n'attribue pas à quelques-unes des quantités $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots$ des valeurs particulières.

Chassons dans les équations $\delta_i - \delta_j = 0$ les dénominateurs et supprimons les facteurs littéraux communs à δ_i et δ_j, qui sont de la forme γ_l ou $\gamma_l - a_{l_1}$, les γ_i étant supposés $\neq 0$ et des a_{l_1}. Nous obtiendrons des équations entre deux au moins des quantités $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Nous considérerons successivement celles de ces relations contenant $\eta, \eta + 1, \eta + 2, \ldots$ des quantités γ, si une de ces relations en contient η exactement, aucune n'en contenant moins. Soient

$$(27) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} D_\eta = 0, & D_\eta' = 0, & \ldots, \\ D_{\eta+1} = 0, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots & \ldots, \end{array} \right.$$

ces relations $D_{\eta+j} = 0$ contenant $\eta + j$ des quantités γ exactement. Prenons d'abord $D_\eta = 0$, et donnons à $\eta - 1$ des γ qui y entrent des valeurs rationnelles déterminées différentes (¹) et différentes de 0,

---

décomposé en facteurs irréductibles,

$$\Delta''_1 \ldots \Delta''_\tau \, \Pi(\delta_i - \delta_j),$$

où $\Delta''_1, \ldots, \Delta''_\tau, \delta_i - \delta_j$ sont des facteurs irréductibles dont aucun n'est nul identiquement quels que soient les δ_i.

Pour étendre au cas des lacunes le théorème que nous établissons ici, il resterait à établir qu'aucun des facteurs $\Delta''_1, \ldots, \Delta''_\tau$ n'est nul identiquement quand on substitue aux δ_i leurs valeurs en fonction des γ_j [formules (26)].

(¹) Pour lesquelles $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ est supposé rationnel.

$a_1, \ldots, a_\theta$; la $\eta^{\text{ième}}$ γ_η est alors déterminée et a au plus deux valeurs. On a, en effet, pour déterminer γ_η une des équations

$$\gamma_\eta(\gamma_\eta - a) = \text{const.} \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\gamma_\eta - a}{\gamma_\eta - b} = \text{const.} \neq 0$$

$$(a, b = 0, a_1, \ldots, \text{ou } a_\theta, a \neq b).$$

Dans la deuxième relation $D_\eta^{(1)} = 0$, donnons à $\eta - 1$ des γ des valeurs différentes et différentes des précédentes et de $0, a_1, \ldots, a_\theta$: la $\eta^{\text{ième}}$ est déterminée ; et ainsi de suite : dans $D_{\eta+1}$, on choisit convenablement η des γ qui y entrent. Nous continuerons de la sorte jusqu'à épuisement des relations (27).

Prenons alors une valeur γ' de γ différente de toutes celles ainsi fixées ou trouvées, qui sont en nombre fini et de $0, a_1, \ldots, a_\theta$: $\frac{\varphi(\gamma')}{\varphi_1(\gamma')}$ *ne peut être rationnel*, sans quoi, si l'on raisonne comme ci-dessus, une au moins des relations (27), $D_{\eta+j} = 0$ par exemple, devrait être satisfaite, quand on prend pour $\eta + j - 1$ des γ qui y entrent les valeurs déjà choisies pour cette équation, et pour la $(\eta + j)^{\text{ième}}$ γ la valeur γ' différente de celles que détermine la relation $D_{\eta+j} = 0$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Le théorème se trouve ainsi complètement établi lorsque, dans les fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, .., $F_{\theta+1}(x)$, $F^{(1)}(x)$, ..., $F_{\theta+1}^{(1)}(x)$, on peut trouver, si grand que soit m, une suite de

$$\sigma = C_{2\theta+4}^2 C_{2\theta+2}^2 \ldots C_4^2 C_2^2$$

termes en $x^m, x^{m+1}, \ldots, x^{m+\sigma-1}$ tels qu'un au moins des coefficients de x^{m+i} soit $\neq 0$ pour une au moins des $2\theta + 4$ fonctions, quel que soit $i = 0, 1, \ldots,$ ou $\sigma - 1$. C'est ce qu'on peut appeler le *cas général.*

Deuxième cas : $\lambda > 1$. — Quand on veut étudier les produits deux à deux, trois à trois, etc. des nombres $L^{(1)}\left(\frac{p}{q}\right)$, on est conduit à envisager les nombres $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$. *Toute propriété commune aux fonctions* $L^{(\lambda)}(x)$ *appartient simultanément aux quotients de fonctions*

de E *et au quotient de leurs produits deux à deux, trois à trois, ...,* λ *à* λ. Nous supposons encore, jusqu'à nouvel ordre, $k = 3$.

Je dis que [1], même si $\lambda = 1$, $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est rationnel ou transcendant, mais n'est pas algébrique.

En effet, d'abord, établissons pour le calcul approximatif de $L^{(\lambda)}(x)$ une formule analogue à celle que nous avons trouvée (p. 315) pour $g^{(\lambda)}(x)$. On a, si $u_{m+\mu}, u^{(1)}_{m+\mu_1} \neq 0$, $u_{m+1} = \ldots = u_{m+\mu-1} = u^{(1)}_{m+1} = \ldots = u^{(1)}_{m+\mu_1-1} = 0$,

$$|u_{m+\mu}|(1-\varepsilon) \leqq \left| g^{(\lambda)}(x) - \sum_0^m u_n \right| \leqq |u_{m+\mu}|(1+\varepsilon_1),$$

$$|u^{(1)}_{m+\mu_1}|(1-\varepsilon') \leqq \left| g^{(\lambda)}_1(x) - \sum_0^m u_n \right| \leqq |u^{(1)}_{m+\mu_1}|(1+\varepsilon'_1).$$

Posons

$$\sum_0^m u_n = S_m, \qquad \sum_0^m u^{(1)}_n = S^{(1)}_m,$$

$$g^{(\lambda)}(x) = S_m + R_m, \qquad g^{(1)}_\lambda(x) = S^{(1)}_m + R^{(1)}_m :$$

$$\frac{g^{(\lambda)}(x)}{g^{(\lambda)}_1(x)} - \frac{S_m}{S^{(1)}_m} = \frac{S_m + R_m}{S^{(1)}_m + R^{(1)}_m} - \frac{S_m}{S^{(1)}_m} = \frac{R_m S^{(1)}_m - R^{(1)}_m S_m}{S^{(1)}_m [S^{(1)}_m + R^{(1)}_m]}.$$

Pour toute valeur de x telle que $g^{(\lambda)}_1(x) \neq 0$, on peut assigner des limites supérieures finies de

$$\frac{1}{S^{(1)}_m + R^{(1)}_m} = \frac{1}{g^{(\lambda)}_1(x)}, \qquad \frac{S_m}{S^{(1)}_m} = L^{(\lambda)}(x)(1+\varepsilon_2),$$

(m assez grand) [2]. D'ailleurs

$$|R_m| \leqq |u_{m+\mu}|(1+\varepsilon_1), \qquad |R^{(1)}_m| \leqq |u^{(1)}_{m+\mu_1}|(1+\varepsilon'_1).$$

Donc

$$\left| L^{(\lambda)}(x) - \frac{S_m}{S^{(1)}_m} \right| \leqq \alpha |u_{m+\mu}| + \beta |u^{(1)}_{m+\mu_1}|, \tag{28}$$

(α, β positifs limités); c'est la formule que nous voulions établir. Donc :

---

(1) $L^{(\lambda)}(x)$ est une fonction méromorphe; ici $L^{(\lambda)}(x)$ est le quotient de deux quelconques des fonctions $g^{(\lambda)}(x)$, formule (19), p. 313.

(2) Si m est assez grand, $S^{(1)}_m(x)$ est alors $\neq 0$.

Pour toute valeur de x qui n'annule pas $g_1^{(\lambda)}(x)$, à partir d'une certaine valeur de m,

$$(28)\qquad \left| L^{(\lambda)}(x) - \frac{\sum_0^m u_n}{\sum_0^m u_n^{(1)}} \right| \leqq \alpha \,|\, u_{m+\mu} \,| + \beta \,|\, u_{m+\mu_1}^{(1)} \,|,$$

($u_{m+1} = \ldots = u_{m+\mu-1} = u_{m+1}^{(1)} = \ldots = u_{m+\mu_1-1}^{(1)} = 0$, $u_{m+\mu}$, $u_{m+\mu_1} = 0$, α, β *positifs et finis*).

On a encore pour $L^{(\lambda)}(x)$ *des inégalités analogues à celles du corollaire IV du théorème I.*

Ceci posé, soit, comme à la page 315,

$$\frac{p}{q} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 i}{\gamma_1} \qquad (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \text{ entiers}),$$

et supposons que $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) = \xi$ soit rationnel ou algébrique de degré α. On a

$$\left| \xi - \frac{\sum_1^m u_n}{\sum_1^m u_n^{(1)}} \right| = \left| \xi - \frac{Q_\nu^{(j)} \gamma_1^{\lambda\nu} \sum_1^m u_n}{Q_\nu^{(j)} \gamma_1^{\lambda\nu} \sum_1^m u_n^{(1)}} \right|,$$

$$\sum_1^m u_n\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{M + N i}{Q_\nu^{(j)} \gamma^{\lambda\nu}},$$

où M et N sont entiers et $u_m(x) = u_m$ est un terme de $g^{(\lambda)}(x)$ de la forme $\frac{\psi_\nu^{(j)}(x)}{Q_\nu^{(j)}}$

1° ξ est rationnel; deux cas pourraient se présenter : ou bien

$$g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{\sum_1^{m\lambda} u_n}{\sum_1^{m\lambda} u_n^{1}}$$

est $\neq 0$ pour une infinité de valeurs de m; d'après la propriété I,

$$\left| \xi - \frac{\sum_{1}^{m\lambda} u_n}{\sum_{1}^{m\lambda} u_n^{(1)}} \right| \geqq \frac{1}{M_1 Q_m^{(\lambda)} \gamma_1^{\lambda m}} \qquad (M_1 \text{ fini});$$

ou bien

$$\xi - \frac{\sum_{1}^{m\lambda} u_n}{\sum_{1}^{m\lambda} u_n^{(1)}} = 0,$$

dès que $m > m_1$.

Soit

$$\sum_{1}^{\lambda m} u_n = S_m, \qquad \sum_{\lambda m+1}^{\infty} u_n = R_m,$$

$$\sum_{1}^{\lambda m} u_n^{(1)} = S_m^{(1)}, \qquad \sum_{\lambda m+1}^{\infty} u_n = R_m^{(1)};$$

pour $m > m_1$,

$$(28\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{S_m}{S_m^{(1)}} &= \frac{S_{m+1}}{S_{m+1}^{(1)}} = \ldots = \frac{S_{m+j}}{S_{m+j}^{(1)}} = \ldots \\ &= \frac{S_{m+1} - S_m}{S_{m+1}^{(1)} - S_m^{(1)}} = \frac{S_{m+2} - S_{m+1}}{S_{m+2}^{(1)} - S_{m+1}^{(1)}} = \ldots. \end{aligned} \right.$$

Soit

$$S_{\nu+1} - S_\nu = \Psi_\nu = \frac{\psi'_\nu(x)}{Q'_\nu} + \ldots + \frac{\psi_\nu^{(\lambda)}(x)}{Q_\nu^{(\lambda)}},$$

$$S_{\nu+1}^{(1)} - S_\nu^{(1)} = \Psi_\nu^{(1)} = \frac{\psi'_{\nu 1}(x)}{Q'_\nu} + \ldots + \frac{\psi_{\nu 1}^{(\lambda)}(x)}{Q_\nu^{(\lambda)}}.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi_\nu \Psi_{\nu+1}^{(1)} - \Psi_\nu^{(1)} \Psi_{\nu+1} \\ &= \left(\frac{\psi'_\nu}{Q'_\nu} + \ldots\right)\left(\frac{\psi'_{\nu+1,1}}{Q'_{\nu+1}} + \ldots\right) - \left(\frac{\psi'_{\nu 1}}{Q'_\nu} + \ldots\right)\left(\frac{\psi'_{\nu+1}}{Q'_{\nu+1}} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Ce produit est de la forme

$$0 = \sum \frac{a_{ij}}{Q_\nu^{(i)} Q_{\nu+1}^{(j)}},$$

avec

$$a_{ij} = \psi_\nu^{(i)} \psi_{\nu+1,1}^{(j)} - \psi_{\nu,1}^{(i)} \psi_{\nu+1}^{(j)}.$$

Si l'on sait que a_{11}, a_{21}, ..., a_{l1} sont nuls, multiplions les deux membres de ce produit par

$$q^{\lambda(2\nu+1)} Q_\nu^{(l+1)} Q_{\nu+1}^{(1)}.$$

Le produit devient

$$0 = a_{l+1,1} q^{\lambda(2\nu+1)} + \sum a_{ij} q^{\lambda(2\nu+1)} \frac{Q_\nu^{(l+1)} Q_{\nu+1}^{(1)}}{Q_\nu^{(i)} Q_{\nu+1}^{(j)}}$$

où, soit $j > 1$, soit $j = 1$, $i \geqq l + 2$.

$$\frac{Q_\nu^{(l+1)} Q_{\nu+1}^{(1)}}{Q_\nu^{(i)} Q_{\nu+1}^{(j)}} = e_k(\nu)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)(l+1)\nu - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1\right) i\nu} e_k(\nu+1)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon'\right)(\nu+1) - \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1'\right) j(\nu+1)},$$

qui est aussi petit qu'on veut dès que ν est assez grand. Donc $a_{l+1,1} q^{\lambda(2\nu+1)}$, qui est entier, est nul, et

$$a_{l+1,1} = 0.$$

On conclura ainsi de proche en proche que $\frac{\psi_\nu^{(i)}}{\psi_{\nu,1}^{(i)}}$ est indépendant de i, par suite $= \frac{S_\nu}{S_\nu^{(1)}}$, par suite indépendant de ν et i, quand $\nu > \nu_1$, d'après (28 *bis*). Donc on peut écrire

$$(28\ ter) \qquad \frac{u_{\lambda m+1}}{u_{\lambda m+1}^{(1)}} = \frac{u_{\lambda m+2}}{u_{\lambda m+2}^{(1)}} = \ldots.$$

Nous savons que ceci est loin d'être toujours impossible pour une valeur de $\frac{p}{q}$ [*comparer* notes (¹), p. 316 et 317)]. Mais on peut indiquer des cas étendus où ceci n'a jamais lieu.

Les coefficients de $u_{\lambda m+1}(x)$, $u_{\lambda m+1}^{(1)}$, $u_{\lambda m+2}$, $u_{\lambda m+2}^{(1)}$ étant donnés sauf un, il n'y a qu'une valeur au plus du dernier restant à fixer qui permette

de satisfaire à

$$u_{\lambda m+1} u^{(1)}_{\lambda m+2} - u_{\lambda m+2} u^{(1)}_{\lambda m+1} = 0.$$

Il sera dès lors facile de former une infinité de fonctions $L^{(\lambda)}(x)$ dans lesquelles

$$u_{\lambda m+1} u^{(1)}_{\lambda m+2} - u_{\lambda m+2} u^{(1)}_{\lambda m+1} \neq 0,$$

pour une infinité de valeurs de m $\left(\text{quand } x = \frac{p}{q}\right)$. On voit en même temps que, en général, les conditions (28 *ter*) n'ont pas lieu.

Supposons encore, par exemple, que pour $m > m_1$, $u_{\lambda m+1}(x)$ et $u^{(1)}_{\lambda m+1}(x)$ aient leurs coefficients réels et de même signe; que $u_{\lambda m+2}(x)$ et $u^{(1)}_{\lambda m+2}(x)$ aient leurs coefficients de signes contraires. Si cette circonstance se présente pour une infinité de valeurs de m, (28 *ter*) est impossible dès que $\frac{p}{q} > 0$. Dans ce cas d'ailleurs, d'après le théorème V et son corollaire I, $g^{(\lambda)}(x)$ et $g^{(\lambda)}_1(x)$ sont transcendants pour $x > 0$.

Ces deux exemples comportent des extensions évidentes lorsque $g^{(\lambda)}(x)$ et $g^{(\lambda)}_1(x)$ présentent des lacunes. Nous n'insistons pas.

Supposons enfin que $g^{(\lambda)}(x)$ et $g^{(\lambda)}_1(x)$ soient des produits $FF_1 \ldots F_{\lambda-1}$. Pour une infinité de valeurs de m

$$\psi^{(\lambda)}_\nu = p_\nu p'_\nu \ldots p^{(\lambda-1)}_\nu x^{\lambda\nu}, \qquad \psi^{(\lambda)}_{\nu,1} = \varpi_\nu \varpi'_\nu \ldots \varpi^{(\lambda-1)}_\nu x^{\lambda\nu},$$

et l'on a une infinité de relations

$$\frac{p_\nu p'_\nu \ldots p^{(\lambda-1)}_\nu}{\varpi_\nu \varpi'_\nu \ldots \varpi^{(\lambda-1)}_\nu} = \frac{p_{\nu+i} p'_{\nu+i} \ldots p^{(\lambda-1)}_{\nu+i}}{\varpi_{\nu+i} \varpi'_{\nu+i} \ldots \varpi^{(\lambda-1)}_{\nu+i}} = \ldots.$$

On peut toujours choisir les fonctions $F, F_1, \ldots$ de façon que ceci ait lieu. Mais il y a des cas étendus où, quel que soit λ, ceci n'a jamais lieu.

En effet, il suffira que, pour une infinité de valeurs de ν,

$$p_\nu p'_\nu \ldots p^{(\lambda-1)}_\nu \neq 0, \qquad \varpi_\nu \varpi'_\nu \ldots \varpi^{(\lambda-1)}_\nu \neq 0,$$

et, pour une infinité d'autres valeurs de ν,

$$p_\nu p'_\nu \ldots p^{(\lambda-1)}_\nu = 0, \qquad \varpi_\nu \varpi'_\nu \ldots \varpi^{(\lambda-1)}_\nu \neq 0;$$

ou encore que les $p'_\nu, \ldots, p^{(\lambda-1)}_\nu, \varpi_\nu, \ldots, \varpi^{(\lambda-1)}$ soient tous réels et de

même signe, les p_ν étant alternativement positifs ou négatifs. On sait d'ailleurs que, dans ces cas, $F(x), \ldots, F_{\lambda-1}(x)$ sont transcendants pour x rationnel > 0.

2° ξ est algébrique. $\xi - \dfrac{\sum_1^{m\lambda} u_n}{\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}}$ n'est jamais nul, le second terme étant rationnel. D'après la propriété I,

$$\left|\xi - \frac{\sum_1^{m\lambda} u_n}{\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}}\right| \geqq \frac{1}{M_1\left(Q_m^{(\lambda)}\gamma_1^{\lambda m}\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}\right)^{\alpha_1}} \qquad (M_1 \text{ fini}).$$

En résumé, que ξ soit rationnel ou algébrique, il faut, *en général,*

$$(29) \qquad \left|\xi - \frac{\sum_1^{m\lambda} u_n}{\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}}\right| \geqq \frac{1}{M_1\left(Q_m^{(\lambda)}\gamma_1^{\lambda m}\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}\right)^{\alpha_2}} \qquad (M_1 \text{ fini}),$$

cette condition ayant *toujours* lieu quand ξ est algébrique.

Or, d'après (28), le premier membre est au plus égal à

$$\alpha\,|u_{\lambda m+\mu}| + \beta\,|u_{\lambda m+\mu_1}|;$$

donc

$$(30) \qquad \left\{\begin{aligned} \delta_1(|u_{\lambda m+\mu}| + |u_{\lambda m+\mu_1}|) &= \delta_1\left\{\left|\frac{\psi_{m+\mu_2}^{(j)}\left(\frac{p}{q}\right)}{Q_{m+\mu_2}^{j}}\right| + \left|\frac{\psi_{m+\mu_3}^{(j_1)}\left(\frac{p}{q}\right)}{Q_{m+\mu_3}^{j_1}}\right|\right\} \\ &\geqq \left|\xi - \frac{\sum_1^{m\lambda} u_n}{\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}}\right|. \end{aligned}\right.$$

Le second membre, si, par exemple, $\mu_2 < \mu_3$ ou $\mu_2 = \mu_3$, $j > j_1$, est de la forme

$$c_k(m+\mu_2)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)(m+\mu_2)j},$$

alors que le dernier membre de (29) est de la forme

$$c_k(m)^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1\right)\lambda\alpha_2 m}.$$

$\sum_1^{m\lambda} u_n^{(1)}$ est d'ailleurs $\neq 0$ pour une infinité de valeurs de m, soit quand ξ est algébrique, soit, en général, quand ξ est rationnel (en particulier dans les cas indiqués précédemment). On a ici $\mu_2 > 0$. La comparaison des deux inégalités (29) et (30) conduit de suite à une impossibilité, d'après le lemme II.

Dans les cas mentionnés pages 343-344, $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ est alors transcendant. Sans rappeler ces cas en détail, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème XIV. — *Tout étant posé comme au théorème V (p. 319), le quotient de deux fonctions $g^{(\lambda)}(x)$ ne prend pour des valeurs rationnelles (réelles ou imaginaires) de x que des valeurs rationnelles ou transcendantes. Autrement dit, les nombres $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$, où $\frac{p}{q}$ est rationnel (réel ou imaginaire), sont exceptionnellement rationnels, en général transcendants. Ils ne sont jamais algébriques.*

On peut trouver des cas étendus où les nombres $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ correspondant à une même fonction $L^{(\lambda)}(x)$ sont tous transcendants [1] *(soit pour $x \neq 0$, soit pour x réel > 0).*

---

[1] Voici un exemple non encore cité; posons

$$V g^{(\lambda)}(x) = P(x) + U g_1^{(\lambda)}(x),$$

où V, P, U sont des polynomes à coefficients entiers, V et U pouvant se réduire

Les produits 2 à 2, 3 à 3, ... des nombres $L^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$ *sont rationnels ou transcendants.*

Corollaire. — *Tous les nombres qu'on déduit de* $H'^{(2)}$ (*p.* 306) *par multiplication ou division sont rationnels ou transcendants. Aucun n'est algébrique.*

Remarque I. — Une somme de quotients de fonctions $g^{(\lambda)}(x)$, c'est-à-dire une somme de fonctions $L^{(\lambda)}(x)$, est une fonction $L^{(\lambda+\lambda_1)}(x)$, où λ_1 est entier. Par exemple,

$$\frac{g^{(\lambda)}(x)}{g_1^{(\lambda)}(x)} + \frac{g_2^{(\lambda)}(x)}{g_3^{(\lambda)}(x)} = \frac{g^{(\lambda)}g_3^{(\lambda)} + g_1^{(\lambda)}g_2^{(\lambda)}}{g_1^{(\lambda)}g_3^{(\lambda)}} = \frac{g_4^{(2\lambda)}}{g_5^{(2\lambda)}}.$$

Les mêmes propriétés de rationalité ou de transcendance restent donc vraies pour les sommes de nombres $g^{(\lambda)}\left(\frac{p}{q}\right)$.

Nous pourrons en particulier énoncer ce théorème :

Théorème XV. — *Soient les fonctions entières*

$$F(x) = \sum_0^\infty \pm \frac{p_n}{q_n} x^n, \tag{31}$$

avec $q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)n}$ *donné,* $|p_n| \leqq e_k(n)^{\varepsilon n}$ $\left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right.$ *entier croissant indéfiniment avec* n, ρ *fixe et* $k \geqq 3\Big)$, *les coefficients ayant des signes quelconques, et les nombres* $N = F\left(\frac{p}{q}\right)$ *qu'on en déduit en attribuant à* x *toutes les valeurs rationnelles possibles.*

à des constantes.

$$L^{(\lambda)}(x) = \frac{g^{(\lambda)}(x)}{g_1^{(\lambda)}(x)} = \frac{P(x)}{V g_1^{(\lambda)}(x)} + \frac{U}{V}$$

est transcendant en même temps que $g_1^{(\lambda)}(x)$ pour les valeurs rationnelles de $\frac{p}{q}$ qui n'annulent pas $P(x)$ (*comp.* théorème V et ses corollaires).

$F\left(\frac{p}{q}\right)$ *est transcendant, si* $F(x)$ *ne se réduit pas à un polynome.*

Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels des nombres N *est un nombre rationnel ou transcendant.*

Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels des fonctions F, *si elle ne se réduit pas à une fraction rationnelle en* x, *est un nombre rationnel ou transcendant pour toutes les valeurs rationnelles de* x.

En effet, cette dernière propriété résulte de ce que le numérateur et le dénominateur sont des fonctions $g^{(\lambda)}(x)$.

On peut aussi considérer les nombres N_2 issus de fonctions rationnelles à coefficients rationnels de fonctions quasi-entières

$$F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right) + F_2\left(\frac{1}{x - a_1}\right) + \ldots;$$

$F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... étant des fonctions du même ensemble E, c'est-à-dire de la forme (31).

En général, ces nombres sont transcendants : ils ne sont jamais algébriques.

§ VII. — *Extensions des théories précédentes. Nombres obtenus par itération.*

Reprenons les fonctions $F(x)$ de l'ensemble E (p. 304), en supposant l'indice $\geqq 3$. Dire que $F\left(\frac{p}{q}\right)$, $\left(\frac{p}{q}\text{ rationnel}\right)$, est transcendant, c'est dire que $F(x) = \xi$ n'a pas la racine rationnelle $\frac{p}{q}$, ξ étant rationnel ou algébrique. Mais on peut, au sujet des équations $F(x) = \xi$, se poser bien d'autres questions.

Une pareille équation peut-elle avoir une racine algébrique; autrement dit, *si* ξ_1 *est algébrique,* $F(\xi_1)$ *peut-il être algébrique?*

Mieux, soient k l'indice de $F(x)$, ζ un nombre transcendant de la forme $f\left(\frac{p}{q}\right)$ ou $f(\xi_1)$, $f(x)$ étant une fonction d'un ensemble analogue à E, d'indice $k_1 \leqq k$; $F(\zeta)$ *peut-il être rationnel, algébrique ou transcendant d'indice* $\leqq k$? Autrement dit, l'équation $F(x) = \zeta_1$,

où ζ_1 est rationnel, algébrique ou transcendant d'indice $\leqq k$, possède-t-elle une racine algébrique ou transcendante d'indice $k_1 < k$? Une racine de $F(x) = 0$, par exemple, peut-elle être une transcendante d'indice k_1 [1]?

Parmi tous ces problèmes, nous nous contenterons, à titre d'indication, de traiter une partie du dernier, qu'on peut formuler ainsi :

Soit ζ un nombre $f\left(\frac{p}{q}\right)$ supposé d'indice $k_1 \geqq 3$ (p, q entiers > 0); $F(\zeta)$, d'indice $k \geqq k_1$, est-il rationnel ou algébrique?

D'après ce que nous avons vu antérieurement (p. 306), en ne considérant que des fonctions $f(x)$, $F(x)$ d'ensembles E′ à coefficients tous positifs, et les indices étant pris $\geqq 3$, on peut toujours supposer $\frac{p}{q} = 1$. On a

$$\zeta = f(1) = \frac{p_0^{(1)}}{q_0^{(1)}} + \frac{p_1^{(1)}}{q_1^{(1)}} + \ldots + \frac{p_n^{(1)}}{q_n^{(1)}} + \ldots,$$

$$F(\zeta) = \frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1}\zeta + \ldots + \frac{p_n}{q_n}\zeta^n + \ldots.$$

De plus nous admettons : 1° pour $F(x)$, que $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ soit un entier croissant constamment et indéfiniment avec n, et $q_n = e_k(n)^{n\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)}$; 2° pour $f(x)$ des conditions semblables avec des valeurs de $q_n^{(1)}$, k_1, ρ_1 différentes ou non de q_n, k, ρ.

Posons

$$\zeta = \zeta_n + \rho_n \qquad (\zeta_n \text{ somme des } n+1 \text{ premiers termes de } \zeta),$$

$$(32) \qquad F(\zeta) = S_m(\zeta) + R_m(\zeta) = S_m(\zeta_n) + R_m(\zeta) + M\rho_n^\alpha$$

[M fini, α entier $\geqq 1$, $S_m(x)$ somme des $m+1$ premiers termes de $F(x)$]. On a

$$\zeta_n = \frac{A_n}{q_n^{(1)}} \qquad (A_n \text{ entier} > 0),$$

---

[1] On pourrait encore examiner si deux équations $F(x) = 0$, $F_1(x) = 0$ d'ensembles analogues à E ont une ou plusieurs racines communes.

et

$$(33)\qquad \rho_n = \frac{p_{n+1}^{(1)}}{q_{n+1}^{(1)}}(1+\varepsilon'),$$

$$S_m(\zeta_n) = \frac{M_n}{q_m(q_n^{(1)})^m} \geqq \frac{1}{q_n(q_n^{(1)})^m},$$

car M_n étant une somme de termes positifs est $\neq 0$;

$$(34)\qquad R_m(\zeta) = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\zeta^{m+1}(1+\varepsilon_1).$$

Admettons que $F(\zeta)=\xi$ soit algébrique de degré β ($\beta \geqq 1$); on aurait (propriété I),

$$|\xi - S_m(\zeta_n)| = \left|\xi - \frac{M}{q_m(q_n^{(1)})^m}\right| \geqq \frac{1}{N_1 q_m^{\beta} q_n^{(1)m\beta}} \qquad (N_1 \text{ fini}),$$

car $\xi > S_m(\zeta_n)$, puisque $\zeta > \zeta_n$ et $S_m(x)$ croît constamment avec m et x, pour $x > 0$, et, d'après (32) à (34),

$$(35)\qquad N_1^{-1} q_m^{-\beta} q_n^{(1)-m\beta} \leqq 2\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\zeta^{m+1} + 2M\frac{p_{n+1}^{(1)\alpha}}{q_{n+1}^{(1)\alpha}}.$$

Nous supposons ici que m et n sont assez grands, et que $F(x)$ et $f(x)$ ne présentent plus de lacunes à partir d'un certain terme. Alors

$$q_m = e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2\right)m} = e_k(m)^{\tau' m}, \qquad q_n^{(1)} = e_{k_1}(n)^{\tau_1' n}, \qquad k \geqq 3, \qquad k_1 \geqq 3,$$

$$p_m \leqq e_k(m)^{\tau m}, \qquad p_n^{(1)} \leqq e_{k_1}(n)^{\tau_1 n} \qquad (\tau, \tau_1 \text{ fixes}),$$

$$\tau < \frac{1}{\rho}, \qquad \tau_1 < \frac{1}{\rho_1}, \qquad \tau' - \tau, \qquad \tau_1' - \tau_1 \text{ finis positifs},$$

$$\frac{q_m}{p_m} = e_k(m)^{\tau_2 m}, \qquad \frac{q_n^{(1)}}{p_n^{(1)}} = e_{k_1}(n)^{\tau_3 n},$$

$$4N_1\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\zeta^{m+1} = e_k(m+1)^{-\tau_4 m}, \qquad 4MN_1\frac{p_{n+1}^{(1)\alpha}}{q_{n+1}^{(1)\alpha}} = e_{k_1}(n+1)^{-\tau_5 n},$$

$\tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ finis, positifs et ayant une limite inférieure > 0. Il faudra donc, d'après (35),

$$(36)\qquad 2 \leqq e_k(m)^{\beta\tau' m} e_{k_1}(n)^{\beta\tau_1' mn}\left[e_k(m+1)^{-\tau_4 m} + e_{k_1}(n+1)^{-\tau_5 n}\right],$$

quels que soient m et n.

Pour montrer que cette inégalité n'est pas toujours possible, par suite que $F(\zeta)$ n'est ni rationnel ni algébrique, il nous suffira de vérifier que l'on a à la fois

$$(35)\qquad \begin{cases} e_k(m+1)^{\tau_1 m} > e_k(m)^{\beta\tau' m} e_{k_1}(n)^{\beta\tau_1' mn}, \\ e_{k_1}(n+1)^{\tau_1 n} > e_k(m)^{\beta\tau' m} e_{k_1}(n)^{\beta\tau_1' mn}, \end{cases}$$

n étant convenablement choisi en fonction de m.

Les lemmes I et II permettent de simplifier la première inégalité, car on a

$$e_k(m+1)^{\tau_1 m} e_k(m)^{-\beta\tau' m} > e_k(m+1)^{\sigma m}$$

(σ fini positif ayant une limite inférieure > 0), et (36) peut être remplacé par

$$(37)\qquad \begin{cases} e_k(m+1)^{\sigma} > e_{k_1}(n)^{\beta\tau_1' n}, \\ e_{k_1}(n+1)^{\tau_1 n} > e_k(m)^{\beta\tau' m} e_{k_1}(n)^{\beta\tau_1' mn}. \end{cases}$$

Nous prendrons

$$(38)\qquad n = e_{k-k_1}(m) + \eta = \log_{k_1-k}(m) + \eta,$$

où η, positif, nul ou négatif, a son module $\leqq \frac{1}{2}$, de façon que $e_{k-k_1}(m) + \eta$ soit l'entier le plus voisin de $e_{k-k_1}(m)$.

Avant d'aller plus loin, nous établirons les lemmes préliminaires suivants, qui ont lieu dès que m est assez grand (entier ou non).

Lemme III. — *Quand α est donné et > 0, $e_{k_1}[e_{k-k_1}(m) + \alpha]$ croît avec k_1 (k_1 positif ou négatif quelconque).*

Il suffira en effet que

$$e_{k_1}[e_{k-k_1}(m) + \alpha] > e_{k_1-1}[e_{k-k_1+1}(m) + \alpha],$$

ou que

$$e^{e_{k-k_1}(m)+\alpha} = e^{\alpha} . e_{k-k_1-1}(m) > \alpha + e_{k-k_1+1}(m),$$

ce qui a lieu si

$$(e^{\alpha} - 1) e_{k-k_1+1}(m)$$

croît quand m croît, c'est-à-dire dès que $\alpha > 0$.

LEMME IV. — *Quand* $\alpha > 0$, $e_{k_2}(m+\alpha) > e_{k_2}(m) + \alpha$, *dès que* $k_2 \geqq 0$.

Ceci a lieu pour $k_2 = 0$. Admettant cette inégalité pour une valeur positive de k_2, on en tire

$$e_{k_2+1}(m+\alpha) \geqq e^{\alpha} e_{k_2+1}(m) > e_{k_2+1}(m) + \alpha,$$

en sorte que le lemme a lieu pour $k_2 = 0, 1, 2, \ldots$.

LEMME V. — *On a*

$$e_{k_2}(m+\beta) > (1+\tau) e_{k_2}(m), \qquad k_2 \geqq 1, \qquad \beta > 0,$$

τ *fixe* > 0.

Pour $k_2 = 1$,

$$e^{m+\beta} = e^{\beta} . e^{m} > (1+\tau) e^{m},$$

si $\tau < e^{\beta} - 1$. Admettant cette inégalité pour une valeur de $k_2 \geqq 1$, on en tire

$$e_{k_2+1}(m+\beta) > e_{k_2+1}(m)^{1+\tau} = e_{k_2+1}(m) e_{k_2+1}(m)^{\tau} > e_{k_2+1}(m)(1+\tau),$$

où τ fini arbitraire > 0 et $\leqq e^{\beta} - 1$, dès que m est assez grand.

LEMME VI. — *On a*

$$e_{k-2}(m+\alpha+\beta) > (1+\tau) e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m) + \alpha],$$

α, β *donnés* > 0, *quand* $k \geqq k_1 \geqq 3$.

On a, si $k \geqq 3$, d'après les lemmes IV et V,

$$\begin{aligned} e_{k-2}(m+\alpha+\beta) &> (1+\tau) e_{k-2}(m+\alpha) \\ &= (1+\tau) e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m+\alpha)] \geqq (1+\tau) e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m) + \alpha], \end{aligned}$$

si $k \geqq k_1 \geqq 3$.

Si $k < k_1$, le lemme VI n'est plus exact : ainsi, pour $k = 3$, $k_1 = 4$,

$$e_{k-3}(m+\alpha+\beta) = m + \alpha + \beta,$$
$$e_{k_1-3}[e_{k-k_1}(m) + \alpha] = e^{\log m + \alpha} = m e^{\alpha},$$

et l'on n'a pas

$$e^{m+\alpha+\beta} > (1+\tau)e^{me^{\alpha}}.$$

Lemme VII. — *On a*

$$e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+\alpha+\beta] > (1+\tau)e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+\alpha],$$

pour $k_1 \geqq 3$, *quel que soit* k *positif ou négatif* ($\alpha, \beta > 0$ *donnés*).

Si $k_1 = 3$,

$$e^{e_{k-k_1}(m)+\alpha}e^{\beta} > (1+\tau)e^{e_{k-k_1}(m)+\alpha},$$

quand $\tau < e^{\beta} - 1$, quel que soit k positif ou négatif.

Admettons le lemme pour une valeur k'_1 de $k_1 \geqq 3$; on en tire

$$\begin{aligned} e_{k'_1-1}[e_{k-k'_1}(m)+\alpha+\beta] &> e_{k'_1-1}[e_{k-k'_1}(m)+\alpha]^{1+\tau} \\ &> e_{k'_1-1}[e_{k-k'_1}(m)+\alpha](1+\tau) \end{aligned}$$

ou

$$e_{(k'_1+1)-2}[e_{(k+1)-(k'_1+1)}(m)+\alpha+\beta] > e_{(k'_1+1)-2}[e_{(k+1)-(k'_1+1)}(m)+\alpha](1+\tau),$$

ce qui établit le lemme VII pour la valeur k'_1+1 de k_1, par suite en général.

Lemme VIII. — *On a*

$$e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+\alpha] > (1+\tau)e_{k-2}(m)$$

pour $k_1 \geqq 3$, *quel que soit* k, α *donné* > 0.

D'après le lemme III, le premier membre croît avec k_1; il suffira donc d'établir le lemme pour $k_1 = 3$, c'est-à-dire de montrer que

$$e^{e_{k-3}(m)+\alpha} = e^{\alpha}.e_{k-2}(m) > (1+\tau)e_{k-2}(m),$$

ce qui a lieu si $\tau < e^{\alpha} - 1$.

Ceci posé, la démonstration devient assez simple :

Prenons la première inégalité (37), ou, d'après (38),

$$e_k(m+1)^\sigma > e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]^{\beta\tau_1'[e_{k-k_1}(m)+\eta]}.$$

Il suffira de prouver que, γ étant fini,

$$(39)\qquad e_k(m+1) > e_{k_1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right]^{\gamma e_{k-k_1}(m)}.$$

D'abord, ceci n'a pas forcément lieu quand $k_1 < k$: prenons $k=3$, $k_1=4$; il faudrait

$$e_2(m+1) > \gamma \log m . e_3\left(\log m + \frac{1}{2}\right),$$

$$e.e^m > \log(\gamma \log m) + e^{m\sqrt{e}},$$

ce qui n'a pas lieu.

Supposons, au contraire, $k \geqq k_1 \geqq 3$. Il suffit

$$e_{k-1}(m+1) > \gamma e_{k-k_1}(m) e_{k_1-1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right].$$

Or, pour $k_1 \geqq 3$,

$$\gamma[e_{k-k_1}(m)] = e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)]^\varepsilon = e_{k_1-1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right]^{\varepsilon_1},$$

ε, ε_1 aussi petits qu'on veut. Il suffit donc, *a fortiori*,

$$e_{k-1}(m+1) > e_{k_1-1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right]^{1+\varepsilon},$$

$$e_{k-2}(m+1) > (1+\varepsilon) e_{k_1-2}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right],$$

ce qui a bien lieu d'après le lemme VI : (39) est donc vérifiée.

Passons à la deuxième inégalité (37); elle devient, d'après (38),

$$\begin{aligned} &e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta]^{\tau_5[e_{k-k_1}(m)+\eta]} \\ &\quad > e_k(m)^{\beta\tau' m} e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]^{\beta\tau_1' m[e_{k-k_1}(m)+\eta]}. \end{aligned}$$

Il suffit que

$$e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta]^{e_{k-k_1}(m)+\eta} > e_k(m) e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]^{\gamma m[e_{k-k_1}(m)+\eta]},$$

γ constante finie, ou

$$(40) \qquad e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta] > \{e_k(m)e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]\}^{\gamma m}.$$

1° $\qquad \eta \geqq 0; \quad e_k(m) \leqq e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta].$

Il suffit donc que

$$e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta] > \{e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]\}^{2\gamma m}$$

ou

$$e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta] > 2\gamma m\, e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+\eta];$$

$e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]$ croît avec k_1, d'après le lemme III, et est

$$\geqq e_{k-1}(m)+\eta = (2\gamma m)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

pour $k \geqq 3$ (ε aussi petit qu'on veut pour m assez grand). Donc

$$2\gamma m \leqq e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]^{\varepsilon},$$

et il suffit

$$e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta] > e_{k_1-1}[e_{k-k_1}(m)+\eta]^{1+\varepsilon}$$

ou

$$e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+1+\eta] > (1+\varepsilon)e_{k_1-2}[e_{k-k_1}(m)+\eta],$$

ce qui est une conséquence du lemme VII; (40) a lieu quand $\eta \geqq 0$.

2° $\qquad \eta < 0; \qquad e_k(m) > e_{k_1}[e_{k-k_1}(m)+\eta].$

Il suffit que

$$e_{k_1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right] > e_k(m)^{2\gamma m},$$

d'après (40), ou

$$e_{k_1-1}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right] > 2\gamma m\, e_{k-1}(m) = e_{k-1}(m)^{1+\varepsilon}$$

ou

$$e_{k_1-2}\left[e_{k-k_1}(m)+\frac{1}{2}\right] > (1+\varepsilon)e_{k-2}(m),$$

ce qui est une conséquence du lemme VIII; (40) a lieu quand $\eta < 0$.

Les deux inégalités (37) ont alors lieu quand on tient compte de (38), et nous en concluons le théorème suivant :

THÉORÈME XVI. — *Considérons les fonctions*

$$F(x) = \sum_0^\infty \frac{p_n}{q_n} x^n,$$

où p_n et q_n sont entiers et positifs, ainsi que $\frac{q_{n+1}}{q_n}$, et, dès que n est assez grand,

$$q_n = e_k(n)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon_n\right)n}, \qquad 0 < p_n \leqq e_k(n)^{\tau n},$$

τ et ρ fixes, $\tau < \frac{1}{\rho}$, k entier $\geqq 3$, x rationnel > 0. Quand k, ρ, x prennent toutes les valeurs possibles compatibles avec ces conditions, non seulement $F(x)$ est transcendant, mais encore, si $F_1(x)$ est une fonction quelconque de même forme que $F(x)$ et d'indice $k_1 \leqq k$,

$$F_1(x) = \sum_0^\infty \frac{p_n^{(1)}}{q_n^{(1)}} x^n$$

satisfaisant à des conditions analogues, $F[F_1(x)]$ est aussi transcendant.

En particulier, $F(F(x))$ est transcendant.

Remarque I. — Quand $k = k_1$, la démonstration se simplifie notablement, car, si l'on prend $m = n$, les inégalités (37) sont des conséquences des lemmes I et II.

Remarque II. — On est ainsi conduit à se poser encore ce problème que nous nous contenterons d'indiquer.

x restant rationnel, et $F, F_1, F_2, \ldots$ étant des fonctions de même forme que F, $F\big(F_1(F_2(F_3))\big)$, par exemple, est-il transcendant? En particulier $F\big(F(F(F))\big)$ est-il transcendant? Autrement dit, les fonctions F du théorème précédent ne donnent-elles, par itération, que des nombres transcendants?

§ VIII. — *Remarques diverses.*

I. *Extension des considérations précédentes à des séries ayant un rayon de convergence fini.* — Considérons une fonction

$$f(x) = \sum_1^\infty a_n x^{\varpi_n},$$

qui peut avoir un rayon de convergence fini, 1 par exemple, et où ϖ_n est un entier qui croît constamment et indéfiniment avec n. On a, si $\frac{p}{q} < 1$,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum a_n \left(\frac{p}{q}\right)^{\varpi_n} = \sum \pm \frac{p_n}{q_n} \frac{p^{\varpi_n}}{q^{\varpi_n}};$$

posons

$$p_n p^{\varpi_n} = P_n, \qquad q_n q^{\varpi_n} = Q_n;$$

Q_n divise Q_{n+1} si q_n divise q_{n+1}. Soit

$$f(z) = \sum_1^\infty \pm \frac{P_n}{Q_n} z^n;$$

$f\left(\frac{p}{q}\right) = F(1)$. $F(z)$, pour une croissance assez rapide des ϖ_n, est une fonction entière.

Eu égard au mode de décroissance des a_n il peut se faire que, sous cette nouvelle forme, on aperçoive, comme corollaires des théorèmes précédents, des propriétés de $f\left(\frac{p}{q}\right)$ que ces théorèmes ne pouvaient pas donner.

Exemple : soit $p = 1$, $q > 1$, $p_n = 1$, $q_n = n!$,

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{x^{\varpi_n}}{n!},$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{n!\, q^{\varpi_n}}, \qquad F(z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n!\, q^{\varpi_n}}.$$

Si $F(z)$ est d'indice $\geqq 3$, ce qui arrivera si ϖ_n est donné et

$$= e_k(n)^{n\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_n\right)}, \qquad k \geqq 2,$$

on voit que $F(1)$ est transcendant, par suite aussi $f\left(\frac{1}{q}\right)$.

Une partie des théorèmes précédents doit alors s'étendre aux fonctions $f(x)$ à rayon de convergence fini ou infini présentant des lacunes d'étendue assez rapidement croissante avec n, en particulier au produit et au quotient de deux fonctions de cette nature. Ainsi, dans l'exemple précédent, les fonctions rationnelles à coefficients rationnels des nombres de la forme $f\left(\frac{1}{q}\right)$ sont des nombres rationnels ou transcendants (théorème XV).

Nous nous contenterons d'avoir signalé ce fait. Nous avons d'ailleurs déjà indiqué antérieurement des propriétés semblables de fonctions analogues à $f(x)$ [1].

II. *Sur* [2] *une propriété curieuse des nombres* X. — On sait (propriété I), d'après Liouville [3], que, étant donné un nombre X_1 limite d'une série infinie donnée de fractions rationnelles,

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{P_n}{Q_n}, \quad \ldots,$$

si les différences $\left|X_1 - \frac{P_n}{Q_n}\right|$ décroissent assez vite quand n croît indéfiniment, ce nombre X_1 est transcendant.

Soit, en particulier, une fraction exprimée dans un système de numération de base q qui présente dans son expression des suites de zéros de plus en plus longues au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la virgule vers la droite. Si le nombre de zéros de ces suites croît assez vite, on obtient les nombres transcendants que nous avons appelés

---

(1) *Journal de mathématiques*, 1902, p. 419, 429.

(2) Voir *Comptes rendus*, 1901, 2e semestre, p. 1191, la définition de ces nombres, rappelée d'ailleurs ci-après.

(3) Liouville, *Journal de mathématiques*, 1851, et Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898, p. 26.

les nombres X définis précisément par cette propriété de leurs suites de zéros dans leur expression dans un système de numération [1].

Les nombres X jouissent d'une propriété excessivement remarquable, qui leur donne vraiment un caractère spécial : soit

$$X = \frac{\delta_1}{q^{\psi_1}} + \frac{\delta_2}{q^{\psi_2}} + \ldots + \frac{\delta_n}{q^{\psi_n}} + \ldots \qquad (X < 1).$$

Supposons ici $\delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots$ entiers positifs, $\leqq q - 1$, ψ_n croissant assez vite avec n pour une valeur au moins de q. La fraction rationnelle

$$X_n = \frac{\delta_1}{q^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\delta_n}{q^{\psi_n}} = \frac{B_n}{q^{\psi_n}}$$

peut être développée dans le système de numération de base q_1 (q_1 premier à q).

Quand nous effectuons, dans ce système de numération, la division de B_n par q^{ψ_n}, tous les restes sont $< q^{\psi_n}$. La division ne peut d'ailleurs pas s'arrêter, car si, par exemple,

$$\frac{B_n}{q^{\psi_n}} = \frac{C}{q_1^{\chi}} \qquad (C \text{ entier}),$$

$$B_n q_1^{\chi} = C q^{\psi_n},$$

et q^{ψ_n} devrait diviser B_n : le développement en fraction de $\frac{B_n}{q^{\psi_n}}$ dans le système de numération de base q_1 est donc illimité.

Mais, les restes étant $< q^{\psi_n}$, on finira, au bout d'un nombre limité d'opérations, par retomber sur le même reste : la fraction obtenue est périodique. On aura ainsi

$$\frac{B_n}{q^{\psi_n}} = \frac{A}{q_1^{\chi_1}} + \frac{A_1}{q_1^{\chi_1+\varpi_1}}\left(1 + \frac{1}{q_1^{\varpi_1}} + \frac{1}{q_1^{2\varpi_1}} + \ldots\right),$$

$A_1 \neq 0$ étant la période, qui a ϖ_1 chiffres. On a ici $\chi_1 = 0$, c'est-à-dire que $\frac{B}{q^{\psi_n}}$ est une fraction périodique simple. En effet, le premier chiffre

---

[1] *Comptes rendus*, 1901, 2e semestre, p. 1191.

de la période étant le premier chiffre de A_1, les derniers de A et de A_1 sont différents, $A - A_1 \not\equiv 0 \pmod{q}$,

$$\frac{B_n}{q^{\psi_n}} = \frac{A}{q_1^{\chi_1}} + \frac{A_1}{q_1^{\chi_1+\varpi_1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{q_1^{\varpi_1}}} = \frac{A}{q_1^{\chi_1}} + \frac{A_1}{q_1^{\chi_1}(q_1^{\varpi_1}-1)} = \frac{A(q_1^{\varpi_1}-1) + A_1}{q_1^{\chi_1}(q_1^{\varpi_1}-1)}.$$

En chassant les dénominateurs, on voit que $q_1^{\chi_1}$ doit diviser le numérateur du deuxième membre, si $\chi_1 > 0$, ce qui exige $\chi_1 = 0$.

D'autre part

$$X - X_n = \frac{\delta_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}(1 + \varepsilon'_{n+1}),$$

ε'_{n+1} tendant vers 0 quand n croît indéfiniment. Le premier chiffre significatif $\neq 0$ dans l'expression de $X - X_n$ dans le système de numération de base q_1 est le $\eta_{n+1}^{\text{ième}}$, η_{n+1} étant aussi grand que l'on veut par rapport à η_n, si ψ_{n+1} est assez grand par rapport à ψ_n. On a

$$X = \frac{B_n}{q^{\psi_n}} + \frac{\delta_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}(1 + \varepsilon'_{n+1});$$

le dernier terme est $< \frac{1}{q_1^{\eta_{n+1}-1}}$, et $\frac{B_n}{q^{\psi_n}}$ a avec X, dans le système de numération de base q_1, à droite de la virgule, si la période A_1 ne comprend pas que des chiffres $q_1 - 1$ (des 9 si $q_1 = 10$), au moins les $\eta_{n+1} - \varpi_1$ premiers chiffres significatifs communs; ceci a lieu dès lors quand A_1 ne se réduit pas au chiffre unique $q_1 - 1$, ($\varpi_1 = 1$). Si, au contraire, ce cas particulier a lieu, dans $\frac{B_n}{q^{\psi_n}}$, tous les chiffres seraient des chiffres $q_1 - 1$. On aurait

$$\frac{B_n}{q^{\psi_n}} = \frac{q_1 - 1}{q_1}\left(1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1^2} + \ldots\right) = 1,$$

ce qui n'a pas lieu : autrement dit, ce cas particulier exceptionnel ne peut se présenter.

Dès lors, $\frac{B_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}$ et X ont, dans le système de numération de base q_1, à droite de la virgule, au moins les $\eta_{n+2} - \varpi_2$ premiers chiffres significatifs communs. D'ailleurs ϖ_1 est fonction de ψ_n, ϖ_2 et η_{n+1} de ψ_{n+1},

η_{n+2} de ψ_{n+2}; on peut prendre la croissance de ψ_n avec n assez rapide pour que $\eta_{n+1} - \varpi_1$ soit aussi grand que l'on veut par rapport à η_n, $\eta_{n+2} - \varpi_2$ aussi grand que l'on veut par rapport à $\eta_{n+1} - \varpi_1$ et η_{n+1}. Dans l'intervalle I entre le premier et le $(\eta_{n+2} - \varpi_2)^{\text{ième}}$ chiffre significatif à droite de la virgule, les chiffres appartiennent aux périodes de $\frac{B_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}$: ϖ_2 étant le nombre de chiffres de la période de $\frac{B_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}$, si ψ_n croît assez vite avec n, $\frac{\eta_{n+2} - \varpi_2}{\varpi_2}$ croît aussi vite que l'on veut, et l'intervalle I comprend autant de périodes que l'on veut de $\frac{B_{n+1}}{q^{\psi_{n+1}}}$. Par conséquent, lorsque ψ_n croît suffisamment vite avec n, le développement de X, dans le système de numération de base q_1, nombre premier à q, présente, à la droite de la virgule, une infinité de suites de chiffres $s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots$, dont chacune est formée par la répétition d'un même groupe de chiffres un nombre aussi grand de fois que l'on veut (quand m est assez grand). Ces fractions sont ainsi voisines des fractions périodiques, et l'on peut les appeler *quasi-périodiques;* de même, on pourra appeler les nombres X dans le système de numération de base q, à cause de leurs suites de o et les nombres X_1 précédents (p. 357), des *nombres quasi-rationnels.*

On connaît cette proposition d'arithmétique élémentaire, résultant d'ailleurs de ce qui précède :

Un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ (p, q entiers premiers entre eux) est représenté dans tout système de numération de base q_1 première à q par une fraction périodique.

La démonstration précédente nous donne le théorème suivant corrélatif pour les nombres X, ou nombres quasi-rationnels.

Théorème XVII. — *Soit un nombre* [1]

$$X = A + \sum_1^\infty \frac{\delta_n}{q^{\psi_n}}$$

[1] Quand $A \neq 0$, en ajoutant $-A$, on obtient un des nombres étudiés ci-dessus. La somme d'un nombre entier, rationnel ou algébrique, et d'un nombre transcendant est d'ailleurs un nombre transcendant.

(δ_n *entier positif* $\leqq q-1$; A, q *entiers;* ψ_n *fonction croissante de* n) *qui, représenté dans le système de numération de base* q, *possède, après le* $\psi_n^{\text{ième}}$ *chiffre significatif à droite de la virgule, un nombre de zéros suffisamment grand (ce qui revient à dire que* ψ_n *croît assez vite avec* n), *autrement dit, par définition, un nombre quasi-rationnel dans le système de numération de base* q.

Dans un système de numération de base q_1 *première à* q, X *est représenté par* A + *une fraction quasi-périodique simple, c'est-à-dire une fraction qui présente immédiatement à la droite de la virgule une infinité de suites* $s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots$ *de chiffres dont chacune est formée par la répétition un nombre aussi grand que l'on veut de fois (dès que* m *est assez grand) d'un même groupe de chiffres, les périodes commençant aussitôt après la virgule.*

On peut établir une proposition en partie réciproque.

Considérons, en effet, une fraction quasi-périodique dans un système de numération de base q_1, et une de ces suites s_n, par exemple, en supposant toutefois, pour plus de généralité, que cette fraction possède immédiatement à droite de la virgule un certain nombre de chiffres n'appartenant pas aux périodes. Soit A_n la période correspondant à s_n, de λ_n chiffres : on pourra écrire

$$X' = \frac{C_n}{q_1^{\alpha_n}} + \frac{A_n}{q_1^{\alpha_n+\lambda_n}}\left(1 + \frac{1}{q_1^{\lambda_n}} + \ldots + \frac{1}{q_1^{(k_n-1)\lambda_n}}\right) + \frac{D_n}{q_1^{\alpha_n+k_n\lambda_n+1}},$$

où $\frac{k_{n+1}}{k_n}$ croît suffisamment vite avec n, D_n quantité $< q_1$, $A_n \leqq q_1^{\lambda_n} - 1$, $C_n \leqq q_1^{\alpha_n} - 1$, α_n restant limité ou ne croissant pas trop vite avec n.

$$X' = \frac{C_n}{q_1^{\alpha_n}} + \frac{A_n}{q_1^{\alpha_n+\lambda_n}} \frac{1 - \frac{1}{q_1^{k_n\lambda_n}}}{1 - \frac{1}{q_1^{\lambda_n}}} + \frac{D_n}{q_1^{\alpha_n+k_n\lambda_n+1}},$$

$$X' = \frac{C_n}{q_1^{\alpha_n}} + \frac{A_n}{q_1^{\alpha_n}(q_1^{\lambda_n}-1)} + \frac{D_n}{q_1^{\alpha_n+k_n\lambda_n+1}} - \frac{A_n}{q_1^{\alpha_n+k_n\lambda_n}(q_1^{\lambda_n}-1)},$$

$$X' - \frac{C_n(q_1^{\lambda_n}-1) + A_n}{q_1^{\alpha_n}(q_1^{\lambda_n}-1)} = \frac{D_n(q_1^{\lambda_n}-1) - A_n q_1}{(q_1^{\lambda_n}-1)q_1^{\alpha_n+k_n\lambda_n+1}}.$$

Le premier membre décroît aussi vite que l'on veut quand n croît,

pourvu que s_n et k_n croissent assez vite avec n. D'après le théorème connu de Liouville (propriété I, p. 296), X′ est transcendant. D'où ce théorème :

Théorème XVIII. — *Soit une fraction* X′ *quasi-périodique dans le système de numération de base* q_1, *c'est-à-dire, par définition, une fraction qui présente, à la droite de la virgule, une infinité de suites* $s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots$ *de chiffres dont chacune est formée par la répétition un nombre* $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ *de fois au moins d'un même groupe de chiffres, ces suites commençant ou non après la virgule (le nombre de chiffres* α_n *de la partie non périodique immédiatement à droite de la virgule ne croissant pas trop vite quand* n *croît ou restant limité). Si* k_n *croît assez vite avec* n *par rapport à* $\frac{s_n}{k_n}$ *et* α_n, X′ *est transcendant* (¹).

Cette dernière propriété s'étend aux fractions continues quasi-périodiques simples ou mixtes (la suite des quotients incomplets remplaçant la suite des nombres à la droite de la virgule). Nous avons ainsi des exemples, les premiers, croyons-nous, de fractions continues arithmétiques dont tous les quotients incomplets sont limités, et dont on puisse affirmer la transcendance (²).

Bourg-la-Reine, janvier 1904.

(¹) Ces deux théorèmes peuvent être considérés comme se rattachant à un ordre d'idées ayant provoqué plusieurs questions dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens*. Exemples : questions 1836, 1896, 2088, 2464, 2465. Le premier donne même une réponse à la question 2088 posée par nous.

(²) On savait toutefois qu'il y en avait (*voir*, par exemple, Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 33).

Complément au Mémoire intitulé
« Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources » (¹);

Par M. J. BOUSSINESQ.

Sommaire. — § I. Objet de ce complément; équations du mouvement de la nappe liquide. — § II. Formules de deuxième approximation, dans le cas de vitesses presque horizontales. — § III. Petites dénivellations d'une masse aqueuse infiltrée, de profondeurs quelconques, avec ou sans écoulement au dehors. — § IV. Extinction graduelle du mouvement, dans une nappe infiltrée profonde et à bords verticaux, par propagation uniforme d'une onde ascendante.

§ I. — Objet de ce complément; équations du mouvement de la nappe liquide.

1. Dans mon Mémoire *Sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources,* j'ai supposé assez petites pour avoir leurs carrés et produits négligeables les pentes, tant de superficie que de fond, de ces nappes, de manière à pouvoir, quand la nappe est beaucoup plus longue et large que haute ou profonde, regarder partout comme horizontales, *à une première approximation,* les vitesses moyennes locales de ses diverses parties, ou comme verticales les surfaces d'égale charge φ auxquelles ces vitesses

(¹) Inséré au commencement de ce Volume, p. 5 à 78.

d'écoulement sont perpendiculaires. Il résultait de là que la charge φ avait, en tous les points d'une verticale quelconque (x, y), même valeur qu'en son plus haut point *mouillé,* intersection de la verticale, (x, y), avec la *surface libre* souterraine, où φ égale l'altitude h, diminuée, par la tension capillaire des innombrables *ménisques* constituant cette surface libre, d'une petite quantité ζ, fonction, donnée en x et y, de la température et de la compacité du sol perméable. Je me propose ici de former des équations de mouvement plus générales, convenant au cas de pentes quelconques tant du *fond* (ou sous-sol imperméable), que de la surface libre souterraine, afin de voir, d'une part, dans l'hypothèse de petites pentes, ce qu'une deuxième approximation ajouterait ou modifierait aux résultats de la première, et, d'autre part, dans l'hypothèse de pentes de fond quelconques, les lois des lents mouvements dus à de petites dénivellations superficielles h.

2. Nous prendrons les deux axes rectangulaires des x et des y dans le plan horizontal mené par le *seuil* de la *source,* si l'on a ménagé, sur la partie du contour de la nappe infiltrée (vue en *plan*) où l'eau arrive à l'air libre, un écoulement assez rapide pour que la lame liquide ruisselant sur le seuil soit sans cesse d'épaisseur négligeable. Lorsque, au contraire, le liquide arrivé à l'air libre y formera une *nappe extérieure,* plus ou moins profonde, animée d'assez lents mouvements pour que la pression y varie, sur chaque verticale ou auprès, suivant la loi hydrostatique, nous prendrons comme plan des xy sa surface libre horizontale, que nous supposerons maintenue à niveau constant : il est clair que la charge φ, somme de la pression, évaluée en hauteur d'eau, et de l'altitude $(-z)$ en (x, y, z), se trouvera alors nulle dans la nappe extérieure et, par suite, sur toutes les portions de la surface du sol perméable qui seront contiguës à cette nappe extérieure, portions constituant les orifices qui relient celle-ci à la nappe infiltrée.

Il pourrait arriver aussi qu'il n'y eût pas d'orifice, ou que la nappe fût dépourvue d'écoulement; nous prendrions alors pour plan horizontal des xy celui où, dans l'équilibre final, la pression serait nulle (abstraction faite de la pression atmosphérique); et la charge φ y tendrait, par suite, vers zéro, comme quand un écoulement est possible.

Dans tous les cas où il y aura à tenir compte de la dépression capillaire ζ, nous admettrons, pour éviter d'inutiles complications, qu'aucune partie de la *nappe infiltrée* n'atteigne la *superficie libre* du sol, c'est-à-dire n'arrive au contact de l'air extérieur. Bref, la nappe infiltrée ne sera limitée alors que par la surface libre souterraine, par des parois et par la nappe extérieure. Car, s'il en était autrement, les points où elle arriverait à fleur de sol seraient le siège d'actions capillaires jusqu'à présent mal définies, et qui y rendraient le ruissellement de l'eau difficile, ce semble, à calculer ou à formuler.

Enfin, nous dirigerons vers le bas l'axe des ordonnées verticales z, qui croîtront, dans la nappe infiltrée, depuis la surface libre souterraine et sans cesse changeante ayant l'équation $z = -h$, jusqu'au fond *fixe* ou sous-sol (que nous supposerons, le plus souvent, imperméable) $z = \mathrm{H}$, à profondeur H fonction donnée de x et de y.

3. Tout élément de volume rectangulaire $d\varpi = dx\,dy\,dz$, découpé idéalement dans la partie imbibée du sol, recevra, par unité de temps, à travers ses six faces et à partir de l'époque t, un afflux total de liquide exprimé, comme on sait, par

$$\left(\frac{d\mathrm{F}_x}{dx} + \frac{d\mathrm{F}_y}{dy} + \frac{d\mathrm{F}_z}{dz}\right) d\varpi \quad (^1).$$

Mais, la portion de $d\varpi$ accessible au liquide se trouvant occupée dès l'époque t, cet afflux total est nul; et l'on a

$$(111) \qquad \frac{d\mathrm{F}_x}{dx} + \frac{d\mathrm{F}_y}{dy} + \frac{d\mathrm{F}_z}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire, vu les formules générales (1) des flux F (p. 12),

$$(112) \qquad \frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0.$$

Telle sera donc l'*équation indéfinie* du problème, équation qui régit les variations, *actuelles* ou dans l'espace, de la charge φ, aux

(1) Nos notations seront celles du Mémoire principal et les numéros désignant les formules feront suite à ceux des formules mêmes de ce Mémoire.

divers points (x, y, z) de la nappe; le coefficient K des flux, fonction de la compacité et de la température du sol, y sera donné en x, y, z.

4. Cette équation étant du second ordre, il faudra, pour compléter la détermination de φ à chaque instant, y joindre une relation convenable, spéciale à chaque élément de la surface qui limite la nappe.

Occupons-nous, d'abord, de la surface commune à la nappe infiltrée et au sol filtrant. Une partie en sera généralement occupée par des *parois*, c'est-à-dire par des solides imperméables, principalement par le sous-sol, quand nous le supposons entièrement ou presque entièrement dépourvu d'orifices. Si l'on appelle $\frac{d\varphi}{dn}$, pour un élément quelconque de cette partie, la dérivée de la charge le long d'une normale dn aboutissant à la surface et issue d'un point intérieur infiniment voisin, le flux $K\frac{d\varphi}{dn}$ qui entre par cet élément sera donc nul. En particulier, sur le fond $z - H = 0$, où les cosinus directeurs de la normale dn ont entre eux mêmes rapports que les dérivées en x, y, z de $z - H$, c'est-à-dire que $-\frac{dH}{dx}, -\frac{dH}{dy}, 1$, la dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ égalera, en abstrayant un facteur fini, $\frac{d\varphi}{dx}\frac{dH}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dH}{dy} - \frac{d\varphi}{dz}$, expression qu'il faudra ainsi annuler. On aura donc

$$(113)\quad \begin{cases} \text{(aux parois)} & \dfrac{d\varphi}{dn} = 0, \\ \text{(au fond imperméable)} & \dfrac{d\varphi}{dz} = \dfrac{dH}{dx}\dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{dH}{dy}\dfrac{d\varphi}{dy}. \end{cases}$$

Le reste de la surface commune à la nappe infiltrée et au sol filtrant sera constitué par des ouvertures, ou *orifices*, aux divers points desquels nous admettons une distribution hydrostatique des pressions extérieures et, par suite, une hauteur nulle φ de charge. Nous y aurons, en conséquence, vu la petitesse des forces vives de filtration et des hauteurs de charge *perdues à la sortie*,

$$(114)\qquad \text{(aux orifices)}\quad \varphi = 0 \quad [1].$$

---

[1] Si la surface de la nappe extérieure, au lieu d'être fixe et choisie comme

5. Il reste la surface libre souterraine, ou limite supérieure de la nappe, exprimée par l'équation $z = -h$, avec h fonction de x et de y donnée *initialement* et que nous supposerons, pour simplifier, n'avoir à chaque instant t qu'une valeur sur chaque verticale (x, y), mais dont les variations d'un instant à l'autre seront à déterminer. La pression intérieure (évaluée en hauteur de fluide) y étant $-\zeta$, la charge φ y devient $h - \zeta$, et s'y trouve connue dès que h l'est. On aura donc

$$(115) \qquad (\text{à la surface supérieure } z = -h) \quad \varphi = h - \zeta.$$

Mais il faudra calculer le déplacement élémentaire, $\frac{dh}{dt}dt$, de chaque élément de la surface libre souterraine, situé sur toute verticale *fixe* (x, y), pour obtenir h d'instant en instant. A cet effet, nous appellerons σ la projection totale, sur le plan des xy, de cette surface supérieure $z = -h$, et $d\sigma$ celle de l'élément considéré. Celui-ci aura, dès lors, pour aire $\frac{d\sigma}{\cos\gamma}$, si $\cos\gamma$ est le troisième des cosinus directeurs de la normale dn à l'élément, tirée *ici* vers l'intérieur de la nappe, ou faisant un angle aigu avec les z positifs. Ces trois cosinus directeurs seront $\frac{dh}{dx}\cos\gamma$, $\frac{dh}{dy}\cos\gamma$, $\cos\gamma$; de sorte que le flux, sortant, pendant l'instant dt, à travers l'élément plan *fixe* $\frac{d\sigma}{\cos\gamma}$ du sol, ou qui vient transpirer au-dessus, sera $\left(K\frac{d\varphi}{dn}\right)\frac{d\sigma}{\cos\gamma}dt$, c'est-à-dire

$$K\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{dh}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dh}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\right)d\sigma\, dt.$$

A travers une petite partie quelconque, $\int\frac{d\sigma}{\cos\gamma}$, de la surface telle qu'elle est à l'époque t, l'afflux ou apport correspondant total de liquide sera donc

$$(116) \qquad dt\int K\left(\frac{d\varphi}{dz} + \frac{dh}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dh}{dy}\frac{d\varphi}{dy}\right)d\sigma.$$

---

plan de repère, était variable, mais connue à chaque instant, le second membre zéro de cette relation (114) ferait place à une fonction donnée de t. L'on continuerait à reconnaître, comme ci-après (n° 7), la détermination complète du problème.

Or c'est, à d'insignifiants écarts près sur le contour, ce volume liquide qui aura surélevé les niveaux de $\frac{dh}{dt}dt$, et aura rempli la capacité libre, appelée μ par unité de volume apparent du terrain, comprise entre la surface considérée $\int \frac{d\sigma}{\cos\gamma}$, telle qu'elle est à l'époque t, et la nouvelle surface, relative à l'époque $t + dt$, si elle se trouve effectivement au-dessus. Appelons, pour fixer les idées, μ_0 ce que devient, aux points de la surface supérieure, la valeur de μ, partout fonction donnée de x, y, z; et, le volume terreux envahi par la nappe se composant de filets verticaux exprimés par $d\sigma\, dh$, auxquels correspondent les capacités $\mu_0\, d\sigma\, dh$ accessibles au liquide, l'afflux total (116) aura aussi la valeur

$$(116\ bis) \qquad dt \int \mu_0 \frac{dh}{dt} d\sigma.$$

Les fonctions sous le signe $\int$, continues par hypothèse, étant très sensiblement constantes dans le *petit champ* commun des deux intégrales (116) et (116 *bis*), seront égales entre elles. Par conséquent, la condition cherchée, propre à déterminer les déplacements élémentaires de la surface libre, est

$$(117) \quad \mu_0 \frac{dh}{dt} = K\left(\frac{d\varphi}{dz} + \frac{dh}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dh}{dy}\frac{d\varphi}{dy}\right) \qquad (\text{pour } z = -h).$$

Si, au lieu de s'élever, la surface supérieure s'abaissait, ce serait à travers ses éléments tels qu'ils sont à l'époque $t + dt$, qu'on évaluerait l'afflux (alors négatif) y surgissant entre les époques t, $t + dt$; et l'on obtiendrait encore, évidemment, la formule (117) [1].

---

[1] On pourrait même, toujours, construire un peu plus bas ces éléments de la surface à travers laquelle surgissent les flux (116), modificatifs du niveau, savoir, à une petite distance verticale constante ε de la surface actuelle $z = -h$, juste assez au-dessous de cette dernière pour que les flux y acceptent la formule régulière $K\frac{d\varphi}{dn}$; car il semble difficile que des anomalies locales, toujours à craindre aux limites des nappes (note de la page 15), ne la mettent pas en défaut

6. On y arriverait aussi, dans tous les cas, même quand le fond se trouve percé d'orifices, en considérant la partie imbibée, sans cesse comprise de $z = -h$ à $z = \mathrm{H}$, d'un filet rectangulaire vertical de terrain, à section droite $d\sigma = dx\,dy$. Les deux flux qui sortent, par unité de temps, à travers les deux faces $(\mathrm{H}+h)\,dy$, $(\mathrm{H}+h)\,dx$, contiguës à l'arête (x, y), sont respectivement

$$dy\int_{-h}^{\mathrm{H}} \mathrm{F}_x\,dz, \quad dx\int_{-h}^{\mathrm{H}} \mathrm{F}_y\,dz,$$

tandis que les flux entrant dans le filet par les faces opposées ont les mêmes valeurs, accrues de leurs différentielles respectives en x et y. Enfin, la face inférieure donne accès à un flux, $\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dn}\frac{d\sigma}{\cos\gamma}$, exprimé par

$$\left[\mathrm{K}\left(\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\mathrm{H}}{dx} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)\right]_1 d\sigma,$$

ou par

$$\left(\mathrm{F}_z - \mathrm{F}_x\frac{d\mathrm{H}}{dx} - \mathrm{F}_y\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_1 d\sigma,$$

si l'on convient d'affecter de l'indice 1 les quantités qui doivent être prises à la limite supérieure $z = \mathrm{H}$ des intégrales. Or la capacité, $\mu_0\,d\sigma\frac{dh}{dt}$, envahie durant l'unité de temps par le liquide, à la partie supérieure du filet, vaudra l'excédent, pour ces cinq faces, des flux entrés sur les flux sortis; et l'on aura, en divisant par $d\sigma$,

$$(118)\quad \mu_0\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dx}\int_{-h}^{\mathrm{H}} \mathrm{F}_x\,dz + \frac{d}{dy}\int_{-h}^{\mathrm{H}} \mathrm{F}_y\,dz + \left(\mathrm{F}_z - \mathrm{F}_x\frac{d\mathrm{H}}{dx} - \mathrm{F}_y\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_1.$$

Mais la différentiation complète, en x ou y, des deux intégrales

---

à la surface libre elle-même. On continuerait, alors, à égaler (sensiblement) les deux intégrales (116), (116 *bis*) et, par suite, leurs éléments; car, ajoutées au liquide, de hauteur apparente ε, compris, à l'époque t, au-dessus de la surface $z = -h + \varepsilon$, elles donneraient, à très peu près, deux expressions différentes du volume fluide qui s'y trouve à l'époque $t + dt$. L'équation (117) subsisterait donc.

définies figurant au second membre, donne en tout, si l'on indique respectivement par les indices 1 et 0 les quantités prises aux deux limites supérieure et inférieure (comme on vient de dire pour la première),

$$\int_{-h}^{\mathrm{H}}\left(\frac{d\mathrm{F}_x}{dx}+\frac{d\mathrm{F}_y}{dy}\right)dz+\left(\mathrm{F}_x\frac{d\mathrm{H}}{dx}+\mathrm{F}_y\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_1+\left(\mathrm{F}_x\frac{dh}{dx}+\mathrm{F}_y\frac{dh}{dy}\right)_0,$$

ou bien, par la substitution, sous le signe $\int$, du troisième terme de (111), transposé, à la somme des deux premiers, et par l'intégration en z,

$$\left(-\mathrm{F}_z+\mathrm{F}_x\frac{d\mathrm{H}}{dx}+\mathrm{F}_y\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_1+\left(\mathrm{F}_z+\mathrm{F}_x\frac{dh}{dx}+\mathrm{F}_y\frac{dh}{dy}\right)_0.$$

La relation (118) devient dès lors identiquement (117), pourvu qu'on y remplace F_x, F_y, F_z par leurs valeurs (1) (p. 12).

7. Si les dénivellations h de la surface supérieure étaient données, à l'époque t, en fonction de x et de y, le système linéaire formé par l'équation indéfinie (112) et par les conditions respectives (113), (114), (115) aux diverses parties de la surface, déterminerait complètement, dans toute la nappe infiltrée, la charge φ. Car, supposé qu'il existât deux solutions distinctes, leur différence φ' vérifierait évidemment les équations

$$(119)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\varphi'}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\varphi'}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\mathrm{K}\frac{d\varphi'}{dz}\right)=0 \text{ partout},\\&\frac{d\varphi'}{dn}=0 \text{ (aux parois)},\quad \varphi'=0 \text{ (aux orif. et à la surf. supér.)}.\end{aligned}\right.$$

Alors la première équation (119), multipliée par φ' et par l'élément de volume $d\varpi$, puis intégrée par parties, à la manière ordinaire, dans toute l'étendue imbibée ϖ du terrain, donnerait, vu l'annulation de φ' ou de sa dérivée en n aux diverses parties de la surface,

$$\int_{\varpi}\mathrm{K}\left(\frac{d\varphi'^2}{dx^2}+\frac{d\varphi'^2}{dy^2}+\frac{d\varphi'^2}{dz^2}\right)d\varpi=0,$$

relation exigeant, dans tout l'espace ϖ, la constance de φ' et, par suite, son annulation comme à la surface supérieure.

L'expression de φ, à l'époque initiale où sont données les dénivellations h, se trouve donc déterminée parfaitement; et, comme la relation (117) fait ensuite connaître pour cette époque, puis, de proche en proche, pour les instants suivants, la vitesse d'élévation ou d'abaissement de la surface libre sur chaque verticale (x, y), le problème des mouvements de la nappe infiltrée paraît bien mis complètement en équation.

§ II. — Formules de deuxième approximation, dans le cas de vitesses presque horizontales.

8. Supposons d'abord la nappe beaucoup plus étendue en longueur et largeur qu'en profondeur, sans orifice de fond, et à petites pentes très graduellement variables, soit de fond, soit de superficie; en sorte que, à une première approximation, les vitesses d'écoulement y soient horizontales, ou, la charge φ, indépendante de la coordonnée verticale z. De plus, admettons la constance, pour chaque verticale (x, y), des deux coefficients spécifiques K et μ_0, qui seront, dès lors, fonction seulement de x et de y. Si l'on appelle Φ la valeur moyenne de φ sur cette verticale, depuis $z = -h$ jusqu'à $z = \mathrm{H}$, *valeur fonction de x, y et t*, l'équation (112) y donnera donc, sensiblement,

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{1}{\mathrm{K}}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right].$$

Deux intégrations successives en z (après multiplication, chaque fois, par dz) depuis $z = z$ jusqu'à la limite $z = \mathrm{H}$ où $\frac{d\varphi}{dz}$ aura, d'après la seconde relation (113), la valeur approchée $\frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\mathrm{H}}{dy}\frac{d\Phi}{dy}$, donneront

$$(120)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi - \varphi_1 = &-\left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\mathrm{H}}{dy}\frac{d\Phi}{dy}\right)(\mathrm{H} - z) \\ &- \frac{1}{\mathrm{K}}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right]\frac{(\mathrm{H} - z)^2}{2}, \end{aligned}\right.$$

formule permettant d'apprécier les petites variations de φ le long de la verticale (x, y). Or multiplions-la elle-même par $\frac{dz}{H+h}$ et intégrons de $z = -h$ à $z = H$, de manière que le premier terme donne précisément la valeur moyenne même Φ de la charge sur toute la partie mouillée de la verticale. Il viendra

$$(121)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi - \varphi_1 = &-\left(\frac{dH}{dx}\frac{d\Phi}{dx} + \frac{dH}{dy}\frac{d\Phi}{dy}\right)\frac{H+h}{2} \\ &- \frac{1}{K}\left[\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\Phi}{dy}\right)\right]\frac{(H+h)^2}{6}, \end{aligned}\right.$$

et, en faisant $z = -h$, $\varphi = \varphi_0$ dans (120), puis retranchant (120) de (121),

$$(122)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi - \varphi_0 = &\left(\frac{dH}{dx}\frac{d\Phi}{dx} + \frac{dH}{dy}\frac{d\Phi}{dy}\right)\frac{H+h}{2} \\ &+ \frac{1}{K}\left[\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\Phi}{dy}\right)\right]\frac{(H+h)^2}{3}. \end{aligned}\right.$$

Les deux relations (121) et (122) évaluent, comme on voit, les écarts respectifs des valeurs φ_0, φ_1 de la charge, aux extrémités de chaque verticale mouillée, d'avec la charge moyenne Φ.

Si l'unité de longueur est choisie comparable à l'épaisseur $H + h$ de la nappe aqueuse, les dérivées de Φ en x et y seront, d'après ces formules, très petites comparativement à Φ, puisque l'on admet la petitesse des rapports de $\Phi - \varphi_0$, $\Phi - \varphi_1$ à Φ.

9. Maintenant voyons ce que devient exactement, lorsqu'on tâche d'y introduire Φ au lieu de φ, la condition spéciale (117), qui détermine le changement élémentaire des dénivellations h. Prenons cette condition sous la forme que nous savons être équivalente (118), réduite ici, par l'absence d'orifices de fond, à

$$(123)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_0\frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dx}\int_{-h}^{H} F_x\,dz + \frac{d}{dy}\int_{-h}^{H} F_y\,dz \\ &= \frac{d}{dx}\left(K\int_{-h}^{H}\frac{d\varphi}{dx}\,dz\right) + \frac{d}{dy}\left(K\int_{-h}^{H}\frac{d\varphi}{dy}\,dz\right). \end{aligned}\right.$$

D'autre part, différentions par rapport à x et à y la formule

$$(\mathrm{H}+h)\Phi = \int_{-h}^{\mathrm{H}} \varphi\, dz,$$

qui définit Φ; ce qui donne

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}+h)\frac{d\Phi}{d(x,y)} &+ \Phi\frac{d(\mathrm{H}+h)}{d(x,y)}\\ &= \int_{-h}^{\mathrm{H}} \frac{d\varphi}{d(x,y)}dz + \varphi_1\frac{d\mathrm{H}}{d(x,y)} + \varphi_0\frac{dh}{d(x,y)},\end{aligned}$$

relations d'où se tireront les valeurs de $\int_{-h}^{\mathrm{H}} \frac{d\varphi}{d(x,y)}dz$ à porter dans (123). On aura ainsi

$$(124)\quad \left\{\begin{aligned}\mu_0\frac{dh}{dt} = &\ \frac{d}{dx}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}+h)\frac{d\Phi}{dx} + \mathrm{K}(\Phi-\varphi_1)\frac{d\mathrm{H}}{dx} + \mathrm{K}(\Phi-\varphi_0)\frac{dh}{dx}\right]\\ &+ \frac{d}{dy}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}+h)\frac{d\Phi}{dy} + \mathrm{K}(\Phi-\varphi_1)\frac{d\mathrm{H}}{dy} + \mathrm{K}(\Phi-\varphi_0)\frac{dh}{dy}\right];\end{aligned}\right.$$

et les formules approchées (121), (122) de $\Phi-\varphi_1$ et de $\Phi-\varphi_0$ permettront d'éliminer du second membre toute autre fonction inconnue que h et Φ. Comme, en outre, la condition (115) donne $\varphi_0 = h - \zeta$ et, par suite, à très peu près, dans les termes de deuxième approximation, $\mathrm{H}+h = \mathrm{H}+\zeta+\Phi$, la formule approchée (122) pourra s'écrire

$$(125)\quad \left\{\begin{aligned}\zeta+\varphi_0 \quad \text{ou} \quad h = \zeta+\Phi &- \left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\mathrm{H}}{dy}\frac{d\Phi}{dy}\right)\frac{\mathrm{H}+\zeta+\Phi}{2}\\ &- \frac{1}{\mathrm{K}}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right]\frac{(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)^2}{3}.\end{aligned}\right.$$

L'équation cherchée (de deuxième approximation) en Φ s'obtiendra donc en portant cette valeur de h et sa dérivée en t dans la formule (124), au second membre de laquelle les petites quantités $\Phi-\varphi_1$, $\Phi-\varphi_0$ auront été remplacées par leurs expressions (121), (122) (avec h réduit à $\zeta+\Phi$), et leurs facteurs $\frac{dh}{d(x,y)}$, réduits de même à $\frac{d(\zeta+\Phi)}{d(x,y)}$.

Bref, nous aurons, en Φ et h, un problème à *trois* variables indépendantes, x, y, t, *d'où se trouvera complètement éliminée la coordonnée verticale* z. Or, notre but, ici, était précisément cette élimination de z, immédiate seulement à la première approximation.

10. Pour arriver à des formules simples, supposons constantes la profondeur H du fond et la dépression capillaire ζ sous la surface. La relation (125) sera dès lors

$$(126)\quad h = \zeta + \Phi - \frac{(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)^2}{3\mathrm{K}}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right];$$

et l'équation (124) se trouvera, de son côté, réduite immédiatement par la destruction mutuelle de quatre termes dans le second membre, à

$$(127)\quad \mu_0\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dx}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)\frac{d\Phi}{dx}\right] + \frac{d}{dy}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)\frac{d\Phi}{dy}\right],$$

c'est-à-dire à la forme simple déjà obtenue (p. 21) en première approximation [1].

---

[1] Si l'on ne négligeait pas les pentes $\frac{d(\mathrm{H},\zeta)}{d(x,y)}$ soit du fond $z=\mathrm{H}$, soit de la superficie telle qu'elle est dans l'état final d'équilibre, avec son élévation ζ due à la capillarité, les quantités entre crochets de (124) deviendraient, tous calculs faits,

$$\mathrm{K}(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)\left[\frac{d\Phi}{d(x,y)} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\mathrm{H}}{dy}\frac{d\Phi}{dy}\right)\frac{d(\mathrm{H}-\zeta)}{d(x,y)}\right]$$
$$-\frac{(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)^2}{6}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right]\frac{d(\mathrm{H}-2\zeta)}{d(x,y)}.$$

A une première approximation, où Φ disparaîtrait devant $\mathrm{H}+\zeta$, elles se réduiraient à $\mathrm{K}(\mathrm{H}+\zeta)\frac{d\Phi}{d(x,y)}$ et, à une deuxième approximation, où l'on conserverait en outre le terme $\mathrm{K}\Phi\frac{d\Phi}{d(x,y)}$, il est clair que tous les autres termes s'effaceraient devant celui-là, pourvu que les pentes en question $\frac{d(\mathrm{H},\zeta)}{d(x,y)}$ fussent seulement comparables à celles, $\frac{d\Phi}{d(x,y)}$, de la superficie, considérée dans la principale partie *dynamique* Φ de son élévation h; car les uns, ceux où figurent

Comme Φ tend vers zéro, on peut le supposer devenu petit. Ne le négligeons toutefois que dans le facteur $(H + \zeta + \Phi)^2$ du dernier terme de (126), terme déjà très faible et qu'il est permis, sans inconvénient, d'altérer un peu par rapport à lui-même. Alors l'équation (126), différentiée en t, donne

$$(128)\quad \frac{dh}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} - \frac{(H+\zeta)^2}{3K}\left[\frac{d}{dx}\left(K\frac{d}{dx}\frac{d\Phi}{dt}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d}{dy}\frac{d\Phi}{dt}\right)\right],$$

relation où l'on peut réduire dans le dernier terme (double), d'après

---

deux dérivées de H ou de ζ avec une de Φ, seraient comparables aux cubes des dérivées premières de Φ, tandis que les autres, les derniers et les plus grands, le seraient aux produits des dérivées premières de Φ par ses dérivées secondes, supposées beaucoup plus petites que Φ. Ainsi, l'équation (127) conserverait sa forme, même en deuxième approximation.

Voici comment on peut reconnaître que les carrés des dérivées premières de Φ en x et y seraient négligeables à côté des dérivées secondes, par suite de l'hypothèse faite que les dérivées successives de Φ sont de plus en plus faibles. Il est naturel d'admettre que toute dérivation en x ou en y de Φ et de ses dérivées produit un rapetissement, relatif, comparable à une certaine puissance, Φ^n, de Φ. Les dérivées premières de Φ seraient, dès lors, comparables à Φ^{1+n} et, les dérivées secondes, à Φ^{1+2n}. Donc, les carrés des dérivées premières atteindraient l'ordre de petitesse de Φ^{2+2n}, ou seraient comme les produits, par Φ, des dérivées secondes.

Il résulte de là que, dans l'hypothèse de $\frac{d(H, \zeta)}{d(x, y)}$ comparable à $\frac{d\Phi}{d(x, y)}$, l'équation (125) continue à se réduire à (126) et donne (128) ci-après. Dès lors, (127) prendrait encore la forme (129); car les différentiations en x et y de (128 *bis*), ou indiquées dans la formule remplaçant (128 *bis*) et qui a le facteur $H + \zeta$, à côté de K, sous un signe $\frac{d}{dx}$ ou $\frac{d}{dy}$, pourraient se faire comme si ce facteur $H + \zeta$ était constant, vu que sa dérivation produirait un rapetissement de l'ordre de $\frac{d\Phi}{d(x, y)}$, ou de Φ^{1+n}, tandis que celle des autres facteurs, comme est le facteur entre crochets de (128 *bis*), ne produit qu'un rapetissement de l'ordre de Φ^n.

On voit donc que l'équation (129) ci-après s'étend, comme (127), au cas de H et ζ, graduellement variables, sauf quand Φ est devenu tellement petit que ses dérivées disparaissent devant celles de H et de ζ. Mais, alors, le phénomène est, en quelque sorte, terminé ou évanoui, et sans intérêt.

cette relation même, $\frac{d\Phi}{dt}$ à $\frac{dh}{dt}$, puis remplacer $\frac{dh}{dt}$ par sa partie principale

$$(128\ bis)\qquad \frac{(H+\zeta)}{\mu_0}\left[\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\Phi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{d\Phi}{dy}\right)\right]$$

résultant de (127). Enfin la substitution de cette valeur (128) de $\frac{dh}{dt}$ ainsi modifiée, dans (127), donne l'équation en Φ cherchée :

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_0\frac{d\Phi}{dt} &= (H+\zeta)\left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx}+\frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\Phi \\ &\quad +\left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx}+\frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{\Phi^2}{2}+\frac{\mu_0(H+\zeta)^3}{3K}\left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx}+\frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right) \\ &\qquad \times\left(\frac{1}{\mu_0}\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx}+\frac{1}{\mu_0}\frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\Phi. \end{aligned}\right.$$

Si, par exemple, le terrain est homogène, ou que K, μ_0 soient constants, cette équation, divisée par K, devient

$$(130)\qquad \frac{\mu_0}{K}\frac{d\Phi}{dt}=(H+\zeta)\Delta_2\Phi+\Delta_2\left[\frac{\Phi^2}{2}+\frac{(H+\zeta)^3}{3}\Delta_2\Phi\right].$$

Le second membre se réduit, en première approximation, à son terme $(H+\zeta)\Delta_2\Phi$; ce qui donne bien alors l'équation du refroidissement d'une plaque homogène. Et l'on voit que la deuxième approximation ajoute à ce second membre, outre le terme non linéaire $\Delta_2\frac{\Phi^2}{2}$, que l'on connaissait déjà, un terme linéaire en $\Delta_2\Delta_2\Phi$, comparable au précédent quand $\Delta_2\Phi$ est de l'ordre de petitesse de Φ^2.

11. Si l'on posait $H=0$ et $\zeta=0$, comme nous l'avons fait (au § VI du Mémoire principal) dans le cas d'un fond plat avec source au niveau de ce fond, l'équation (126), réduite à

$$h=\Phi-\frac{\Phi^2}{3K}\left[\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\Phi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{d\Phi}{dy}\right)\right],$$

donnerait

$$(131)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} - \frac{\Phi}{3K}\Bigg[\Phi\left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{d\Phi}{dt} \\ + 2\frac{d\Phi}{dt}\left(\frac{d.K\frac{d\Phi}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d\Phi}{dy}}{dy}\right)\Bigg], \end{aligned}\right.$$

où l'on substituerait à $\frac{d\Phi}{dt}$, dans les petits termes entre crochets, sa valeur de première approximation $\frac{dh}{dt}$, alors égale à

$$(132)\qquad \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{\Phi^2}{2}$$

en vertu de (127). Et cette expression (131), ainsi transformée, de $\frac{dh}{dt}$, portée dans (127), conduirait à l'équation indéfinie en Φ :

$$(133)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_0\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{\Phi^2}{2} \\ + \frac{2}{3K}\Bigg[\mu_0\frac{\Phi^2}{2}\left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\left(\frac{1}{\mu_0}\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{1}{\mu_0}\frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{\Phi^2}{2} \\ + \Phi\left(\frac{d.K\frac{d\Phi}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d\Phi}{dy}}{dy}\right)\left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{\Phi^2}{2}\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Lorsque K et μ_0 sont constants, il vient, en divisant par K,

$$(134)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mu_0}{K}\frac{d\Phi}{dt} &= \Delta_2\frac{\Phi^2}{2} + \frac{2}{3}\left[\frac{\Phi^2}{2}\Delta_2\Delta_2\frac{\Phi^2}{2} + (\Phi\Delta_2\Phi)\Delta_2\frac{\Phi^2}{2}\right] \\ &= \Delta_2\frac{\Phi^2}{2} + \frac{2}{3}\left[\frac{\Phi^2}{2}\Delta_2\Delta_2\frac{\Phi^2}{2} - (\Delta_1\Phi)^2\Delta_2\frac{\Phi^2}{2} + \left(\Delta_2\frac{\Phi^2}{2}\right)^2\right]. \end{aligned}\right.$$

12. Je n'essaierai pas de tirer parti de ces formules, les calculs de seconde approximation étant loin d'offrir, dans la question présente, l'intérêt qu'ils auraient, par exemple, dans une étude d'ondes régies approximativement par l'équation de d'Alembert ou des cordes vi-

brantes. En effet, les lentes déformations qu'éprouvent de telles ondes, déformations caractéristiques des phénomènes et dès lors importantes à considérer, sont données *uniquement* par la deuxième approximation; car l'équation de d'Alembert les annule. Mais, ici où la première approximation ramène, en général, le problème des mouvements de la nappe à celui du refroidissement d'une plaque et non à la question des cordes vibrantes, cette première approximation règle déjà, même dans le cas particulier, plus complexe, des équations (133) et (134), les altérations assez rapides du phénomène, et une approximation plus élevée ne peut y changer relativement que peu de chose [1].

§ III. — Petites dénivellations d'une masse aqueuse infiltrée, de profondeurs quelconques, avec ou sans écoulement au dehors.

13. Abandonnant l'hypothèse de la quasi-horizontalité des mouvements moyens locaux, supposons maintenant quelconques la profondeur H et les pentes du fond, mais petites les dénivellations h de la surface, ou plutôt leur partie *dynamique* φ_0, autre, d'après (115), que celle, ζ, due à la capillarité. La charge φ étant, dès lors, partout très petite, nous négligerons les carrés et produits de cette fonction ou de ses dérivées. Enfin, pour simplifier, nous supposerons constante, dans la dénivellation h, la partie ζ produite par l'action capillaire, afin de pouvoir prendre, pour surface finale d'équilibre de la nappe, un plan *horizontal*, $z = -\zeta$.

En raison de la continuité de φ, la valeur de cette fonction φ ou de ses dérivées partielles, sur chaque verticale (x, y) et au point où

---

[1] Au moment où s'imprimait, vers le commencement de janvier, le Paragraphe XI de ces *Recherches*, consacré à leur application aux trois sources de Cérilly, d'Armentières et de la Dhuis, dont les deux premières appartiennent au bassin de la Vanne, M. Edmond Maillet calculait les débits d'été d'une troisième source de la Vanne, celle dite du *Miroir*, pour laquelle il obtenait, d'après les observations faites de 1886 à 1900, un coefficient de tarissement α égal à 0,05065. Cette quatrième source se classe donc dans le type de celles de a Dhuis et de Cérilly, qui se présentait théoriquement comme devant être le plus ordinaire.

passe actuellement la surface libre souterraine $z = -\zeta - \varphi_0$, pourra n'être pas distinguée de leur valeur au point (x, y) du plan horizontal $z = -\zeta$; car l'erreur entraînée par une telle substitution, étant de l'ordre du produit, par φ_0, de la dérivée en z de la fonction considérée, sera négligeable d'après l'hypothèse faite. Cela revient à *fixer* le champ où existe et où doit être obtenue la charge φ, dans les limites qu'il a effectivement pour t infini, ou pour φ évanouissant. Et ce sont bien les limites à adopter ici; car, par le fait même de la réduction convenue des équations à leurs parties linéaires en φ, on cherche la forme admissible pour φ dans le cas de valeurs initiales φ_0 infiniment petites, produits d'une fonction arbitraire de x et de y par une constante voisine de zéro.

14. La condition (115), ainsi devenue

$$h = \zeta + \varphi \qquad (\text{pour } z = -\zeta),$$

différentiée en t, donnera, comme vitesse $\frac{dh}{dt}$ d'exhaussement de la surface, la dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$ prise pour $z = -\zeta$. Et cette valeur portée, afin d'éliminer h, dans la relation (117), rendue linéaire par la réduction de son second membre au premier terme, la transformera en une relation capitale, régissant φ à la limite supérieure $z = -\zeta$ du champ, savoir

$$(135) \qquad \mu_0 \frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{K} \frac{d\varphi}{dz} \qquad (\text{pour } z = -\zeta).$$

Celle-ci vient compléter la condition d'état initial, où h_0 désignera la valeur primitive de h et $f(x, y)$ la fonction arbitraire donnée $h_0 - \zeta$:

$$(136) \qquad \varphi = h_0 - \zeta = f(x, y) \qquad (\text{pour } z = -\zeta \text{ et } t = 0).$$

Ces relations (135) et (136), en s'adjoignant aux équations (112), (113) et (114), déterminent complètement φ. Car, s'il existait deux fonctions différentes φ et $\varphi + \varphi'$ les vérifiant, leur différence φ' satis-

ferait évidemment aux équations suivantes :

$$(137)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(K\dfrac{d\varphi'}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(K\dfrac{d\varphi'}{dy}\right) + \dfrac{d}{dz}\left(K\dfrac{d\varphi'}{dz}\right) = 0 \ \text{(partout)}, \\ \text{(à la superficie } z = -\zeta) \quad K\dfrac{d\varphi'}{dz} = \mu_0\dfrac{d\varphi'}{dt}, \\ \text{(sur le reste de la surface)} \quad \left(\dfrac{d\varphi'}{dn} \text{ ou } \varphi'\right) = 0, \end{cases}$$

et, enfin,

$$(138)\qquad \text{(pour } t = 0 \text{ et } z = -\zeta) \quad \varphi' = 0.$$

Or, la première équation (137), multipliée par φ' et par un élément de volume $d\varpi$, puis intégrée, par parties, à la manière ordinaire, dans toute l'étendue ϖ comprise entre le plan $z = -\zeta$ et les parois ou les orifices, donne immédiatement, grâce aux trois dernières relations (137) et en appelant $d\sigma$ les divers éléments de la surface supérieure, confondue avec sa projection σ sur le plan $z = -\zeta$,

$$-\int_\sigma \mu_0 \frac{d\varphi'}{dt}\varphi' \, d\sigma - \int_\varpi K\left(\frac{d\varphi'^2}{dx^2} + \frac{d\varphi'^2}{dy^2} + \frac{d\varphi'^2}{dz^2}\right) d\varpi = 0,$$

ou bien

$$(139)\qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma \frac{\mu_0}{2}\varphi'^2 \, d\sigma + \int_\varpi K\left(\frac{d\varphi'^2}{dx^2} + \frac{d\varphi'^2}{dy^2} + \frac{d\varphi'^2}{dz^2}\right) d\varpi = 0.$$

Mais, d'après (138), le carré φ'^2 est nul initialement sur toute la surface σ; et, s'il cessait de l'être à un moment donné, ce serait pour rendre positive, ainsi que sa dérivée en t, l'intégrale de surface figurant au premier membre de la formule (139), lequel aurait alors tous ses éléments de même signe et ne pourrait pas s'annuler.

Donc $\varphi' = 0$; et la fonction φ qui satisfait aux équations (112), (113), (114), (135) et (136) du problème est unique.

15. Le mode de démonstration qui précède rappelle tout à fait celui par lequel on prouve que la question du refroidissement d'un corps est déterminée par son équation indéfinie et par les conditions ordinaires aux limites ou initiale. C'est que, en effet, le problème actuel est,

analytiquement, identique à celui du refroidissement d'un corps athermane isotrope, pourvu de la conductibilité intérieure K, occupant même situation que la nappe aqueuse dans son état final de repos, avec surface maintenue à la température zéro, *aux orifices*, mais calorifiquement imperméable, *aux parois*, ainsi que dans le plan $z = -\zeta$, et dont, enfin, la capacité pour la chaleur serait nulle, sauf dans une couche supérieure mince où, très grande par unité de volume, elle aurait la valeur finie μ_0 par unité d'aire.

Car, alors, la relation (135) exprimerait bien l'échauffement de cette couche par le flux calorifique $K\frac{d\varphi}{dz}$ venu de l'intérieur, tandis que, dans le reste du corps, l'annulation de la capacité pour la chaleur réduirait l'équation indéfinie du refroidissement à celle, (112), des températures stationnaires (¹).

16. Il est clair qu'une pareille condensation de toute la capacité calorifique du corps dans sa couche supérieure, tout en donnant un cas limite ou extrême de la question du refroidissement, n'est pas de nature à changer la formule générale de la *température* φ. Il y aura donc lieu de prendre pour φ la somme $\sum cUT$ d'une infinité de *solutions simples*, produits de constantes arbitraires c, dépendant de l'état initial (136), par des facteurs U, T fonctions, respectivement, les premiers, des coordonnées x, y, z, les seconds, du temps t (²).

(¹) Si l'on remplaçait, dans (135), $\frac{d\varphi}{dt}$ par $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, les équations de notre problème des petits mouvements de la nappe infiltrée prendraient la forme de celles des ondes provoquées, à la surface du liquide pesant remplissant un bassin, par de rapides impulsions qu'on y exerce du dehors (*voir*, par exemple, mon Volume intitulé *Applications des potentiels, etc.*, p. 578 à 582). Aussi passe-t-on de la solution $\varphi = \sum cUe^{-mt}$ de la question présente, à celle de la question de ces ondes, en remplaçant simplement les exponentielles e^{-mt} par les facteurs trigonométriques $\cos(t\sqrt{m})$.

(²) On pourrait même, tout de suite, s'appuyant sur les démonstrations données à propos du problème du refroidissement, prendre $T = e^{-mt}$. (*Voir* la XVe de mes Leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie*

Les équations (112), (113), (114), vérifiées séparément par chaque solution simple, deviennent

$$(140)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(K\dfrac{dU}{dx}\right)+\dfrac{d}{dy}\left(K\dfrac{dU}{dy}\right)+\dfrac{d}{dz}\left(K\dfrac{dU}{dz}\right)=0, \\ \text{(aux orifices et aux parois)}\left(U \text{ ou } \dfrac{dU}{dn}\right)=0, \end{cases}$$

tandis que la relation (135), vérifiée de même, prend la forme

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=\frac{K}{\mu_0}\frac{1}{U}\frac{dU}{dz}\,(\text{pour } z=-\zeta).$$

Les deux membres étant indépendants, le premier, des deux coordonnées x et y, le second, du temps t, ont pour valeur une même constante $-m$. Par suite, d'une part, T est proportionnel à e^{-mt}, et l'on peut écrire

$$(141)\qquad \varphi=\sum c\,e^{-mt}U;$$

d'autre part, aux relations (140) s'adjoint, pour compléter la détermination de la forme de U et des *coefficients d'extinction m* des exponentielles, la condition spéciale

$$(142)\qquad K\frac{dU}{dz}=-m\mu_0 U\ (\text{pour } z=-\zeta).$$

17. Multiplions l'équation indéfinie en U, qui est la première (140), par l'élément $d\varpi$ du volume ϖ de la nappe et par une fonction continue U′ de x, y, z, qui soit, ou la fonction U elle-même, ou la fonction analogue correspondant à une exponentielle $e^{-m't}$, autre que e^{-mt}; puis intégrons par parties comme on a fait ci-dessus pour établir la formule (139), en tenant compte des conditions aux limites (140), tant pour la fonction U′ que pour la fonction U, et de la condition (142) pour la fonction U. Nous aurons

$$(143)\qquad m\int_\sigma \mu_0 UU'\,d\sigma=\int_\varpi K\left(\frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dU'}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dU'}{dz}\right)d\varpi.$$

---

avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière, t. I, p. 230 à 245.)

Si l'on fait $U' = U$ dans cette relation, il vient pour m le quotient de deux intégrales, l'une, de volume, l'autre, de surface, essentiellement positives; ce qui montre que *tous les nombres m possibles sont positifs,* ou que ce sont bien des *coefficients d'extinction.*

Si, au contraire, l'on fait U' différent de U et correspondant à un coefficient d'extinction m' autre que m, l'équation analogue à (143), mais en m' et non en m, retranchée de (143), donnera

$$(144)\quad (m - m')\int_\sigma \mu_0 UU'\,d\sigma = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_\sigma \mu_0 UU'\,d\sigma = 0.$$

On pourra donc appliquer la méthode d'élimination de Fourier au calcul des coefficients c affectant les diverses solutions simples, et qui dépendent de l'état initial (136). En effet, si nous appelons U_0 les valeurs des fonctions U à la superficie $z = -\zeta$, la condition (136) devient

$$(145)\qquad \sum cU_0 = f(x, y).$$

Or, en multipliant celle-ci par $\mu_0 U_0\,d\sigma$, puis intégrant sur toute l'étendue σ de la surface supérieure, enfin, observant que les termes du premier membre de (145) autres que cU_0 pourront s'écrire $c'U'_0$ ou donneront lieu à l'intégrale $c'\int_\sigma \mu_0 U_0 U'_0\,d\sigma$, nulle en vertu de (144), l'on aura bien

$$(146)\qquad c\int_\sigma \mu_0 U_0^2\,d\sigma = \int_\sigma \mu_0 f(x, y) U_0\,d\sigma.$$

Et l'on en déduira le coefficient c quelconque d'amplitude, qui s'y trouve *séparé* de tous les autres.

18. Supposons maintenant la nappe aqueuse cylindrique ou prismatique, c'est-à-dire limitée par des bords verticaux, reliant la surface libre $z = -\zeta$ à un fond *horizontal* $z = H$. Et admettons, d'une part, que le coefficient K des flux soit le produit $k\varkappa$ d'une fonction positive k de x et de y, par une fonction $\varkappa$ de z, également positive, égale à 1 à la surface supérieure $z = -\zeta$, et que le rapport $\frac{\mu_0}{k}$ soit

constant; d'autre part, que le fond soit, tout entier, ou une paroi, ou un orifice, et que chaque bande verticale des bords se trouve aussi, de haut en bas, ou tout entière paroi, ou tout entière orifice.

Si alors on prend pour fonctions U les produits de facteurs V, dépendant de x et de y, par des facteurs, Z, dépendant de z seul et se réduisant à 1, comme $\varkappa$, à la surface supérieure, d'abord, l'équation indéfinie, déduite de la première relation (140), deviendra immédiatement

$$-\frac{1}{k\mathrm{V}}\left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)\right]=\frac{1}{\varkappa\mathrm{Z}}\frac{d}{dz}\left(\varkappa\frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right).$$

Et ses deux membres, indépendants, le premier, de z, le second, de x et de y, se réduiront à une même constante, que j'appellerai ν; de sorte que l'équation indéfinie se dédoublera, pour régir séparément U et Z, dans les deux suivantes :

$$(147)\quad \frac{d}{dx}\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)=-\nu k\mathrm{V},\qquad \frac{d}{dz}\left(\varkappa\frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right)=\nu\varkappa\mathrm{Z}.$$

L'on peut, pour fixer les idées, considérer la fonction V uniquement sur la surface supérieure σ, où x, y prennent toutes leurs valeurs et au contour de laquelle pourront alors être rapportées les conditions (140) concernant les parois et ouvertures verticales, à normales dn dirigées comme celles de ce contour. En effet, ces conditions, où il faudra faire $\mathrm{U}=\mathrm{VZ}$, seront

$$(148)\qquad \left(\frac{d\mathrm{V}}{dn}\text{ ou }\mathrm{V}\right)=0\quad(\text{sur le contour de }\sigma),$$

tandis que la relation d'état initial (145), où $\mathrm{U}=\mathrm{U}_0=\mathrm{VZ}_0=\mathrm{V}$, deviendra

$$(149)\qquad \sum c\mathrm{V}=f(x,y).$$

Or l'adjonction des relations (148) et (149) à la première équation (147) constitue précisément le système d'équations qui déterminerait la température v, mise sous la forme ordinaire $v=\sum c\mathrm{V}e^{-\nu t}$, dans une plaque à bases imperméables qui recouvrirait la surface σ et

aurait, avec $f(x, y)$ pour température initiale, son contour en partie imperméable et en partie maintenu à zéro, pourvu que l'équation indéfinie de son refroidissement fût

$$(150) \qquad k\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dv}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(k\frac{dv}{dy}\right).$$

Donc, si nous admettons qu'on ait résolu ce problème de refroidissement, les fonctions V, les constantes ν, toutes positives, et les coefficients c d'amplitude, seront connus.

Cela posé, et l'intégration de la seconde équation indéfinie (147), en Z, introduisant deux constantes arbitraires, il restera, pour déterminer ces constantes et le coefficient corrélatif m d'extinction de l'exponentielle e^{-mt}, d'une part, les deux relations

$$(151) \qquad Z = 1 \quad (\text{pour } z = -\zeta), \qquad \left(\frac{dZ}{dz} \text{ ou } Z\right) = 0 \quad (\text{pour } z = H),$$

dont la seconde résultera des troisième ou deuxième conditions (140) relatives au fond, et, d'autre part, une fois Z ainsi complètement défini, l'équation (142), devenue

$$(152) \qquad \frac{dZ}{dz} = -m\frac{\mu_0}{k} \quad (\text{pour } z = -\zeta);$$

d'où se tirera la valeur de m correspondant à chaque valeur de ν. Le problème sera donc résolu.

19. Supposons $\varkappa = 1$ ou K fonction uniquement de x et de y, comme au § II. Alors la seconde équation (147) admet les deux intégrales particulières $\operatorname{coh}(H\sqrt{\nu} - z\sqrt{\nu})$, $\operatorname{sih}(H\sqrt{\nu} - z\sqrt{\nu})$, dont l'une sera exclue par la relation (151) relative au fond $z = H$, savoir la seconde, si ce fond est une paroi, et la première, s'il est un orifice. En attribuant à l'intégrale particulière subsistante le coefficient convenable pour vérifier la première relation (151), l'on aura donc, dans ces deux cas respectifs d'un fond imperméable et d'un fond orifice,

$$(153) \qquad Z = \text{soit} \quad \frac{\operatorname{coh}(H\sqrt{\nu} - z\sqrt{\nu})}{\operatorname{coh}(H\sqrt{\nu} + \zeta\sqrt{\nu})}, \qquad \text{soit} \quad \frac{\operatorname{sih}(H\sqrt{\nu} - z\sqrt{\nu})}{\operatorname{sih}(H\sqrt{\nu} + \zeta\sqrt{\nu})};$$

et l'équation (152) donnera enfin, pour calculer les coefficients d'extinction m, la formule

$$(154) \qquad m = \frac{K}{\mu_0}\sqrt{\nu}(\text{tah ou coth})(H\sqrt{\nu} + \zeta\sqrt{\nu}).$$

Si l'on y pose, pour abréger, $(H + \zeta)\sqrt{\nu} = \alpha$, cette expression de m sera proportionnelle à l'une des deux fonctions $\alpha \operatorname{tah}\alpha$ ou $\alpha \coth\alpha$. Or la dérivée de celle-ci en α est $\frac{\operatorname{sih}(2\alpha) \pm 2\alpha}{2(\operatorname{coh}\alpha \text{ ou } \operatorname{sih}\alpha)^2}$, fraction positive comme α; car son numérateur, nul pour $\alpha = 0$, a sa propre dérivée par rapport à 2α, savoir $\operatorname{coh}(2\alpha) \pm 1$, essentiellement positive. Donc m croît avec α, ou avec ν; et la plus petite valeur de ν donnera la plus petite de m, celle à laquelle correspond l'expression asymptotique, cUe^{-mt}, de φ.

20. Les résultats deviennent particulièrement simples quand la profondeur H est très grande; car, alors, tous les cosinus ou sinus hyperboliques figurant dans les formules (153) sont, du moins pour les valeurs modérées de z, ceux d'arguments considérables et se réduisent à des moitiés d'exponentielles. Il vient donc, vu que, d'ailleurs, dans (154), la tangente ou cotangente hyperbolique ne diffère plus sensiblement de 1,

$$(155) \qquad (\text{pour H très grand}) \quad \begin{cases} Z = e^{-(\zeta+z)\sqrt{\nu}}, \qquad m = \dfrac{K}{\mu_0}\sqrt{\nu}, \\ \varphi = \Sigma c V e^{-\sqrt{\nu}\left(\zeta + z + \frac{K}{\mu_0}t\right)}. \end{cases}$$

On voit que la charge φ ne dépend plus que des trois variables

$$x, \quad y, \quad z + \frac{K}{\mu_0}t,$$

ou que la relation (135), écrite

$$(156) \qquad \frac{\mu_0}{K}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

cesse d'être une condition spéciale à la surface supérieure, pour devenir, concurremment avec (112), une véritable équation indéfinie. Mais ce

cas limite d'une nappe infiniment profonde mérite d'être traité plus simplement, et c'est par son étude que je terminerai le présent travail.

§ IV. — Extinction graduelle du mouvement dans une nappe infiltrée profonde et à bords verticaux, par propagation uniforme d'une onde ascendante.

21. Ne faisons pas tout de suite infinie la profondeur H. Supposons-la seulement constante, et, dans cette hypothèse, considérant l'équation indéfinie (112) en φ (où K, ici, ne dépend pas de z) à l'intérieur de la section horizontale, que nous appellerons σ, faite à un niveau z quelconque dans la nappe prismatique, multiplions (112) par $\varphi\, d\sigma$; puis intégrons dans toute l'étendue σ, en appliquant aux deux premiers termes l'intégration par parties. La condition $\left(\frac{d\varphi}{dn} \text{ ou } \varphi\right) = 0$ relative au contour de la section annulera partout la somme des deux termes intégrés; et nous aurons

$$-\int_\sigma K\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2}\right) d\sigma + \int_\sigma K\varphi \frac{d^2\varphi}{dz^2}\, d\sigma = 0,$$

ou bien, en remplaçant $\varphi \frac{d^2\varphi}{dz^2}$ par $\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\varphi^2}{2}\right) - \frac{d\varphi^2}{dz^2}$, multipliant par 2 et réduisant,

$$(157) \qquad \frac{d^2}{dz^2}\int_\sigma K\varphi^2\, d\sigma = 2\int_\sigma K(\Delta_1\varphi)^2\, d\sigma.$$

Cette équation montre que l'intégrale $\int_\sigma K\varphi^2\, d\sigma$ a sa dérivée seconde en z essentiellement positive, ou sa dérivée première en z,

$$2\int_\sigma K\varphi \frac{d\varphi}{dz}\, d\sigma,$$

croissante depuis la surface $z = -\zeta$ jusqu'au fond $z = H$. Cette dérivée première, étant visiblement nulle au fond, où disparaît soit la charge φ, soit le flux entrant $K\frac{d\varphi}{dz}$, se trouve donc négative quel que

soit z; et, par suite, l'intégrale $\int_\sigma K\varphi^2\,d\sigma$ est décroissante de haut en bas. Comme sa valeur, essentiellement positive, ne lui permet de décroître en tout que dans une mesure finie, sa dérivée en z devra donc s'évanouir asymptotiquement aux grandes profondeurs z, si l'on fait H de plus en plus considérable.

Ainsi la fonction continue φ, à valeurs comparables sur toute l'étendue de σ, ne croît pas sans limite avec z, quelque grand que devienne H, puisque la moyenne (convenablement définie) de φ^2, à chaque niveau z, est tenue de diminuer quand z grandit.

22. Si la condition relative au fond est $\varphi = 0$, l'intégrale $\int_\sigma K\varphi^2\,d\sigma$ s'y annulera. Or cette intégrale, ayant sa dérivée en z évanouissante aux grandes profondeurs, s'annulera aussi, très sensiblement, aux niveaux z plus ou moins voisins du fond; et, comme tous ses éléments sont de même signe, l'on y aura, quand H croîtra sans limite, φ très petit, ou $\frac{d\varphi}{dz}$ tendant vers zéro.

De même, quand la condition au fond est $\frac{d\varphi}{dz} = 0$, la dérivée suivante $\frac{d^2\varphi}{dz^2}$ y tend vers zéro, si H grandit indéfiniment. Car l'équation (112), où K ne dépend, par hypothèse, que de x et de y, différentiée en z, montre que $\frac{d\varphi}{dz}$, substitué à φ dans cette équation (112), y satisfait non moins que φ. Et l'on peut en dire autant de la condition relative au contour des sections σ, savoir $\frac{d\varphi}{dn}$ ou $\varphi = 0$: le symbole $\frac{d}{dn}$ y désignant $(\cos\alpha)\frac{d}{dx} + (\sin\alpha)\frac{d}{dy}$, avec α indépendant de z, la dérivation par rapport à z les transforme en $\left(\frac{d}{dn}\frac{d\varphi}{dz} \text{ ou } \frac{d\varphi}{dz}\right) = 0$.

On peut donc bien, dans le cas présent où le fond est une paroi, dire de $\frac{d\varphi}{dz}$ ce qu'on disait de φ quand le fond était un orifice.

D'après cela, l'expression $\frac{\mu_0}{K}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\varphi}{dz}$, premier membre de (156), que j'appellerai ψ et qui, d'après (135), s'annule à la surface supé-

rieure $z = -\zeta$, s'annulera aussi au fond, avec φ et $\frac{d\varphi}{dz}$, quand, H croissant indéfiniment, le fond sera un orifice. Et dans le cas où ce serait une paroi, la dérivée $\frac{d\psi}{dz}$ s'y annulera. D'ailleurs, même dans ce cas, φ et, par suite, $\frac{d\varphi}{dt}$ restent finis pour z infini; de sorte que l'expression ψ elle-même ne grandit pas sans limite. Ainsi, l'on aura toujours

$$(158) \qquad \text{(pour H et } z \text{ infinis)} \qquad \psi\frac{d\psi}{dz} = 0.$$

23. Cela posé, continuant à appeler ψ le premier membre de l'équation (156), évaluons l'expression

$$(159) \qquad \frac{d}{dx}\left(K\frac{d\psi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\psi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(K\frac{d\psi}{dz}\right),$$

analogue au premier membre de (112). Il viendra, vu que le rapport $\frac{\mu_0}{K}$ est supposé constant et le coefficient K des flux indépendant de z,

$$K\frac{d\psi}{dx} = \left(\frac{\mu_0}{K}\frac{d}{dt} - \frac{d}{dz}\right)\left(K\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

puis

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\psi}{dx}\right) = \left(\frac{\mu_0}{K}\frac{d}{dt} - \frac{d}{dz}\right)\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varphi}{dx}\right).$$

L'on aura de même $\frac{d}{dy}\left(K\frac{d\psi}{dy}\right)$ et enfin

$$\frac{d}{dz}\left(K\frac{d\psi}{dz}\right) = K\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\mu_0}{K}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\varphi}{dz}\right) = \left(\frac{\mu_0}{K}\frac{d}{dt} - \frac{d}{dz}\right)\frac{d}{dz}\left(K\frac{d\varphi}{dz}\right).$$

L'expression (159) devient ainsi

$$\left(\frac{\mu_0}{K}\frac{d}{dt} - \frac{d}{dz}\right)\left[\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(K\frac{d\varphi}{dz}\right)\right],$$

c'est-à-dire zéro, en vertu de (112).

Donc la fonction ψ vérifie la même équation (112) que φ. Et elle satisfait également, sur le contour de chaque section horizontale σ,

à la même condition que φ : car cette condition, $\left(\frac{d\varphi}{dn} \text{ ou } \varphi\right) = 0$, différentiée en t, donne $\left(\frac{d}{dn}\frac{d\varphi}{dt} \text{ ou } \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$; et l'on vient de voir (p. 388) que, d'autre part, $\left(\frac{d}{dn}\frac{d\varphi}{dz} \text{ ou } \frac{d\varphi}{dz}\right) = 0$. L'on a bien, par suite,

$$(160) \qquad \left(\frac{d\psi}{dn} \text{ ou } \psi\right) = 0 \qquad (\text{sur le contour de } \sigma).$$

L'on obtiendra en conséquence, pour ψ, à chaque niveau z, une relation analogue à (157), ou prouvant que l'intégrale $\int_\sigma K\psi^2\, d\sigma$ a sa dérivée première en z, $2\int_\sigma K\psi\frac{d\psi}{dz}d\sigma$, décroissante de haut en bas. Comme celle-ci, dans le cas d'une profondeur H infinie, est nulle au fond d'après (158), elle ne pourra qu'être, alors, négative à tous les niveaux; et la fonction essentiellement positive $\int_\sigma K\psi^2\, d\sigma$ ne pourra pas croître de la surface au fond. Or, l'équation (135) l'annule à la surface. Donc elle sera nulle partout, et l'on aura identiquement $\psi = 0$.

24. C'est bien dire que la relation (156) devient une équation indéfinie du problème, reliant directement la manière dont la charge φ varie avec t à la manière même dont elle variait initialement avec z. Son intégrale exprime, en effet, que φ dépend de z et de t uniquement par la variable intermédiaire $z + \frac{\mu_0}{K}t$. Donc, dès que les dénivellations données, pour $t = 0$, à la surface $z = -\zeta$, ont fait connaître partout la charge *initiale* $\varphi = F(x, y, z)$, déterminée, en tous les points (x, y, z) de la nappe, par les relations (112), (113), (114) et (115), ces charges résultent, à toutes les époques t ultérieures, de la formule

$$(161) \qquad \varphi = F\left(x, y, z + \frac{\mu_0}{K}t\right);$$

et l'état physique, les flux de transpiration, qu'elles entraînent, se propagent de bas en haut, sur chaque verticale, avec la vitesse ou *célérité* constante $\frac{\mu_0}{K}$. *Chaque état physique réalisé d'abord aux*

profondeurs z croissantes, vient se produire successivement à tous les niveaux supérieurs, jusqu'à la surface $z = -\zeta$, où il disparaît. Et l'évanouissement graduel du phénomène, dans le temps, se fait, à chaque niveau z, comme il s'était fait initialement, dans l'espace, de ce niveau aux niveaux plus bas. Le mouvement s'éteint par la durée, comme par la profondeur.

Il est vrai que les équations (112), (113) et (114) doivent être vérifiées, par φ, à toute époque t et non pas seulement pour $t = 0$. Mais, dès que la nappe cylindrique est supposée indéfinie vers le bas, avec évanouissement simplement asymptotique de φ pour $z = \infty$, ces équations (112) à (114), qui régiraient les températures *stationnaires* dans un cylindre géométriquement identique à la nappe et à génératrices ou imperméables ou maintenues à zéro *sur toute leur longueur*, sont autant satisfaites, *en chaque point* (x, y, z) de l'espace situé au-dessous du plan $z = -\zeta$, quand le cylindre a un mouvement ascendant arbitraire, que lorsqu'il est fixe. Et elles admettent ainsi pour intégrale, non seulement $\varphi = F(x, y, z)$, mais aussi $\varphi = F(x, y, z + T)$, où T désignerait une fonction quelconque du temps. C'est cette fonction arbitraire T, nulle, pour $t = 0$, en raison de (115) où h est alors connu, que l'équation (135) a déterminée pour tous les instants ultérieurs [1].

25. Il y a, du moins quand le coefficient K des flux est constant, des cas intéressants où la fonction F elle-même peut être exprimée non plus seulement en série de solutions simples, sous la forme

$$\Sigma c V e^{-(\zeta+z)\sqrt{\nu}},$$

mais en termes finis. C'est, d'abord, le cas où la dénivellation initiale φ_0 n'a des valeurs, $f(x, y)$, différentes de zéro, que sur une très petite fraction de la surface supérieure $z = -\zeta$, et loin de son contour; en sorte que la condition relative aux limites tant inférieure que latérales

---

[1] Les résultats précédents ont été résumés dans trois Notes des 8, 16 et 22 août 1904 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXXXIX, p. 387, 417 et 441).

de la nappe puisse être censée se réduire à

$$\varphi = 0 \quad (\text{pour } x, y \text{ ou } z \text{ infinis}).$$

Alors le potentiel newtonien, $\int \frac{f(x_0, y_0)\, d\sigma}{r}$, d'une couche fictive de matière étalée sur le plan $z = -\zeta$, et ayant, au point quelconque (x_0, y_0) de ce plan, la valeur $f(x_0, y_0)$ par unité d'aire, potentiel où r désigne la distance du point quelconque (x, y, z) de la nappe à l'élément $f(x_0, y_0)\, d\sigma$ de la couche, permet de représenter simplement la charge initiale $F(x, y, z)$; car l'on a

$$(162) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \int_\sigma \frac{f(x_0, y_0)\, d\sigma}{r} \\ &= \frac{\zeta + z}{2\pi} \int_\sigma \frac{f(x_0, y_0)\, d\sigma}{[(\zeta + z)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

En effet, la fonction potentielle et, par suite, sa dérivée en z, nulles aux distances infinies de la couche supposée limitée, vérifient, en outre, à toutes les distances $\zeta + z$ de son plan autres que zéro, l'équation indéfinie (112), devenue $\Delta_2 \varphi = 0$; et, enfin, la dérivée en z de la même fonction potentielle se réduit, comme on sait, pour $\zeta + z$ infiniment petit, au produit de -2π par la densité superficielle $f(x, y)$, prise égale à φ_0, de la couche.

Un second cas est celui où la dénivellation initiale ne s'étend que sur une région de la surface supérieure encore petite relativement, mais voisine d'un côté vertical de la nappe constitué soit par une paroi, soit par un orifice. Il suffit alors d'imaginer la nappe latéralement indéfinie en tous sens, comme dans le cas précédent, et de calculer, dans (162), le potentiel $\int \frac{f(x_0, y_0)\, d\sigma}{r}$, pour une couche qui aurait encore la masse $f(x_0, y_0)$, par unité d'aire, sur la superficie $z = -\zeta$ *effective*, mais une masse égale à celle-là, *en valeur absolue*, au point du plan $z = -\zeta$ symétrique du point quelconque (x_0, y_0) de cette superficie, par rapport à la face verticale considérée, en attribuant, d'ailleurs, à cette masse géométriquement symétrique de la première, même signe qu'à celle-ci, si la face latérale en question est

une paroi, et signe contraire, si elle est un orifice. Car les valeurs du potentiel total et, par suite, de sa dérivée en z, proportionnelle à φ, seront alors, évidemment, égales et de même signe de part et d'autre du plan vertical de symétrie, dans le premier cas, égales et de signe contraire, dans le second; de sorte que la condition correspondante

$$\left(\frac{d\varphi}{dn} \text{ ou } \varphi\right) = 0$$

se trouvera, vu la continuité de φ, vérifiée d'elle-même sur ce plan. Celui-ci pourra donc devenir soit une paroi, soit un orifice, dans la nappe censée d'abord indéfinie latéralement, sans que rien soit changé au phénomène.

26. On conçoit qu'en associant ainsi, aux valeurs effectives $f(x_0, y_0)$ de φ_0 sur la partie du plan horizontal $z = -\zeta$ où existe la nappe, certaines valeurs fictives sur *plusieurs* parties du même plan où elle ne s'étend pas, valeurs *symétriques* des premières (quant à leur distribution), par rapport aux bords verticaux effectifs, et prises soit avec mêmes signes, soit avec signes contraires, suivant qu'ils sont occupés par des parois ou par des orifices, l'on obtienne parfois, sur une partie en tout finie ou infinie du plan $z = -\zeta$, une couche fictive totale,

$$\int f(x_0, y_0)\, d\sigma;$$

offrant ces deux genres respectifs de symétrie par rapport à toutes les faces latérales de la nappe proposée. Et il est clair qu'alors la formule (162) continue à exprimer, en tous les points (x, y, z) de celle-ci, la charge initiale $\varphi = F(x, y, z)$.

Toutefois, quand la superficie $z = -\zeta$ de la nappe a plus de deux côtés ou en a de parallèles, que c'est, par exemple, un rectangle, ou un triangle équilatéral, etc., et que, par suite, la couche fictive totale $\int f(x_0, y_0)\, d\sigma$ offre une distribution périodique *sur une étendue* du plan $z = -\zeta$ *infinie dans les deux sens,* si, de plus, les faces latérales sont toutes des parois, ou que la nappe infiltrée, privée d'écoulement, ait son volume invariable, il y aura lieu (comme j'ai dit au n° **2**)

de placer l'origine des z, de manière à annuler la valeur moyenne de la dénivellation initiale $\varphi_0 = f(x, y)$. Sans cela, le potentiel serait infini et la charge initiale (162) ne tendrait pas vers zéro dans les grandes profondeurs z ([1]).

Si l'on veut en arriver alors jusqu'aux valeurs numériques de φ, chacun des compartiments périodiques, égaux à la base supérieure de la nappe proposée, en lesquels se trouve divisé le plan $z = -\zeta$, donne une partie distincte de l'intégrale; et celle-ci devient ainsi une *série double*, plus ou moins convergente, dont le calcul peut être fort abrégé par des procédés spéciaux ([2]).

([1]) On peut voir à ce sujet, dans le Tome II, p. 45, de ma *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière,* la discussion concernant le problème analogue de l'échauffement permanent d'un corps par des sources calorifiques extérieures, voisines de sa surface.

([2]) J'ai exposé, au n° 316* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments,* p. 103* à 108*), ces procédés de réduction, qui ont été appliqués effectivement en novembre 1883, par Barré de Saint-Venant et M. Flamant, à la question des mouvements d'un liquide dans un vase prismatique, d'où ce liquide s'écoule par un petit orifice percé au milieu de la base (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* t. XCVII, p. 1027 et 1105). La solution de ce problème dépend d'un potentiel des vitesses complètement analogue au potentiel newtonien que nous considérons ici, comme je l'avais montré, dès 1873, au n° 202, p. 546, de mon *Essai sur la théorie des eaux courantes* (*Mémoires des Savants étrangers* de l'Académie des Sciences de Paris, t. XXIII).

Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes;

Par M. S. ZAREMBA,

Professeur à l'Université de Cracovie.

I. — Introduction.

1. Dans les nombreux travaux provoqués par le célèbre Mémoire de M. Poincaré : *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (1), on s'est borné, presque exclusivement, à l'étude du cas où les angles formés avec des droites fixes par la normale à la frontière sont des fonctions continues des coordonnées du pied de la normale. A notre connaissance, M. Korn (2) seul s'est affranchi de cette restriction dans le cas de deux variables indépendantes où il a considéré une frontière affectant la forme d'un polygone curviligne. Mais M. Korn s'est borné strictement à étendre à ce cas la solution du problème de Dirichlet par la méthode de Neumann, sans chercher à effectuer l'extension correspondante de la théorie des fonctions fondamentales.

Ajoutons que M. Korn est conduit à faire, au sujet des valeurs périphériques de la fonction demandée dans le problème de Dirichlet, une hypothèse bien plus particulière que celle de la simple continuité. Il y

(1) *Acta Mathematica*, 1896.

(2) Korn, *Abhandlungen zur Potentialtheorie*. Dümmler, Berlin.

a donc intérêt à reprendre l'étude de toute la théorie dans le cas où, dans le voisinage de certains points de la frontière, la direction de la normale éprouve des variations brusques; tel est précisément le but de ce travail.

En principe, la même méthode est applicable au plan et à l'espace; il existe cependant entre ces deux cas des différences assez marquées pour que chacun d'eux exige une étude spéciale. Nous n'envisagerons ici que le cas du plan.

Après avoir défini certains termes et certaines notations dont nous nous servirons constamment, et rappelé certains faits analytiques, nous énoncerons, à la fin de l'Introduction, les résultats principaux que nous avons obtenus.

2. Les problèmes dont nous aurons à nous occuper concernent un domaine déterminé dans le plan par sa frontière (S). Il faut donc, tout d'abord, préciser la notion de ces éléments. A cet effet, considérons dans le plan n lignes fermées, soit

$$(1) \qquad (S_1), \quad (S_2), \quad (S_3), \quad \ldots, \quad (S_n),$$

et supposons : 1° que chacune d'elles, considérée isolément, partage le plan précisément en deux régions connexes dont elle serait la frontière commune; 2° qu'aucune des lignes précédentes n'ait un point commun avec une autre d'entre elles. Le plan sera évidemment partagé par l'ensemble des lignes (1) en $n+1$ régions.

Aucune des lignes (1) n'ayant de points situés à l'infini, il n'y aura, parmi les régions précédentes, qu'une seule région (R_0) s'étendant à l'infini. Nous l'appellerons la *région infinie* et nous diviserons les n autres régions en catégories de la manière suivante : toute région contiguë à la région (R_0) sera dite *de première catégorie*, toute région autre que (R_0) et contiguë à une région de première catégorie sera dite *de seconde catégorie;* enfin, d'une manière générale, toute région contiguë à une région de catégorie k sans être elle-même une région de catégorie $k-1$ sera dite *de catégorie* $k+1$.

Cela posé, nous dirons que les lignes fermées (1) sont des *branches différentes d'une même ligne fermée non connexe;* convenons une

fois pour toutes de désigner cette ligne non connexe par le symbole (S).

Nous dirons, en outre, que l'ensemble des régions de catégories impaires constitue le domaine intérieur (D), et que l'ensemble des autres régions, y compris la région infinie (R_0), constitue le domaine extérieur (D′). D'après cela, la ligne (S) sera la frontière commune des domaines (D) et (D′). Le sens que nous venons de donner aux symboles (S), (D) et (D′) leur sera conservé dans toute l'étendue de ce Mémoire.

Il va sans dire que nous ferons certaines hypothèses restrictives au sujet de la ligne (S).

Nous supposerons que chaque branche de la ligne (S) est formée d'un nombre fini d'arcs que nous appellerons *côtés de la ligne* (S); et nous dirons que les points de concours des côtés sont les *sommets* de cette ligne.

Voici les hypothèses que nous ferons au sujet des arcs précédents :

1° Chacun de ces arcs admet une tangente déterminée en chacun de ses points.

2° Si l'on désigne par ζ l'angle positif non supérieur à $\frac{\pi}{2}$ formé par les normales élevées en deux points quelconques A et B situés sur un même *côté* de la ligne (S), on a

$$\zeta < C.\overline{AB},$$

où C désigne un nombre positif, le même pour chacun des *côtés* de la ligne (S).

3° Il existe une certaine longueur constante δ, la même pour tous les *côtés* de la ligne (S), telle que si l'on décrit d'un point quelconque O, pris sur la ligne (S), comme centre un cercle (Σ) de rayon $\delta_1 \leqq \delta$, mais d'ailleurs quelconque, la circonférence de ce cercle ne rencontrera le *côté* (C) de la ligne (S), *sur lequel ce point est situé*, qu'en deux points ou en un seul point, suivant que la distance du point O à l'extrémité la plus proche du côté C ne sera pas ou sera inférieure à δ_1, et toute parallèle à la normale en O à la ligne (S) ne pourra rencontrer la portion du côté (C) située à l'intérieur du cercle (Σ) qu'en un seul point au plus.

4° Tout angle θ de la ligne (S), c'est-à-dire l'angle formé par les deux côtés issus d'un même sommet et compté à l'intérieur du domaine D vérifiera les inégalités suivantes :

$$0 < \theta < 2\pi.$$

3. De même que dans nos autres travaux sur la méthode de Neumann, nous envisagerons, en même temps que l'équation de Laplace, l'équation plus générale

$$\Delta u - \mu^2 u = 0, \tag{2}$$

où l'on a désigné par μ un nombre réel non négatif, et par Δu, suivant l'usage, l'expression

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Convenons, une fois pour toutes, de représenter par $f(z)$ la fonction définie par l'équation suivante :

$$f(z) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{z^2+t^2}}}{\sqrt{z^2+t^2}}\,dt,$$

où, pour les valeurs réelles de z, les seules que nous aurons à considérer, le radical doit être pris avec le signe positif.

Posons ensuite

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2},$$

en convenant de prendre la détermination positive du radical et considérons la fonction $f(r\mu)$. Cette fonction, regardée comme fonction des variables x et y, est, comme on le sait [1], et comme on le vérifierait immédiatement, une intégrale dont le rôle, par rapport à cette équation, est absolument analogue à celui de la fonction $\log r$ dans la théorie de l'équation de Laplace. On trouvera une étude détaillée de la fonction $f(z)$ et de fonctions analogues dans l'Ouvrage de M. Poin-

---

[1] Poincaré, *Sur les équations de la Physique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894).

caré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*. Mais, pour les applications que nous avons en vue, il suffira de savoir que l'on a [1]

$$(3)\quad \begin{cases} f(z) = (\log z + c)\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2^k k!)^2}\right] \\ \qquad\qquad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2^k . k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right), \end{cases}$$

où c représente une constante qu'il ne nous importe pas de connaître.

Si, dans l'expression d'un potentiel logarithmique, de simple couche ou de double couche, on remplace la fonction $\log r$ par la fonction $f(\mu r)$, on obtient une nouvelle fonction que nous appellerons un *potentiel logarithmique généralisé* de nombre caractéristique μ de simple couche dans le premier cas et de double couche dans le second. Il est évident que tout potentiel logarithmique généralisé représente une intégrale de l'équation (1).

La terminologie que nous avons adoptée pourrait faire croire que, pour $\mu = 0$, les potentiels logarithmiques généralisés se réduisent aux potentiels logarithmiques ordinaires. C'est bien ce qui a lieu pour les potentiels de double couche, mais la même circonstance ne se présente pas, *en général*, pour les potentiels de simple couche : pour qu'elle se présente, il est nécessaire et suffisant que la densité σ de la simple couche vérifie la condition suivante :

$$(4)\qquad \int \sigma\, ds = 0,$$

où l'intégration doit être étendue à toute la ligne portant la simple couche. Rien d'analogue n'a lieu dans l'espace et c'est ce qui empêche de considérer le cas du plan comme un simple cas particulier compris dans le cas de l'espace.

4. Il résulte des recherches récentes sur la théorie de la méthode de

---

[1] SERRET, *Calcul intégral*, 2e édition, p. 581 et 582.

Neumann et sur celle de la méthode de Robin, théories qui, en réalité, ne sont que deux aspects d'une même théorie, que ces théories sont comprises dans celles des deux problèmes suivants :

Convenons de représenter par $(F)_i$ et $(\Phi)_e$ les valeurs limites sur la ligne (S) des fonctions F et Φ définies, la première dans le domaine intérieur (D) et la seconde dans le domaine extérieur (D'); désignons en outre par $\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i$ et $\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_e$ les dérivées normales d'une fonction ψ calculées, la première pour le côté intérieur de la ligne (S) et la seconde pour le côté extérieur, la normale elle-même étant, dans les deux cas, dirigée vers l'intérieur du domaine (D); cela posé, on donne deux fonctions σ_0 et h_0 définies sur la ligne (S) et l'on propose :

1° *D'établir l'existence d'un potentiel de simple couche u et celle d'un potentiel de double couche v, potentiels qui peuvent être des potentiels logarithmiques ordinaires ou des potentiels généralisés de nombre caractéristique donné; vérifiant les équations suivantes :*

$$(5) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i - \left(\frac{du}{dN}\right)_e = \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \left(\frac{du}{dN}\right)_e\right] + 2\sigma_0,$$

et

$$(6) \qquad (v)_e - (v)_i = \lambda[(v)_e + (v)_i] + 2h_0,$$

où λ représente un paramètre variable;

2° *D'étudier les propriétés des fonctions u et v considérées comme fonctions de la variable complexe λ.*

Nous allons étudier ces problèmes en supposant que les fonctions σ_0 et h_0 vérifient les hypothèses suivantes :

1° Chacune d'elles ne peut cesser d'être continue qu'en un nombre limité de points;

2° Chacune des intégrales

$$\int_{(S)} |\sigma_0|\, ds \quad \text{et} \quad \int_{(S)} |h_0|\, ds$$

a un sens.

3° Lorsqu'un point A situé sur la ligne (S) tend suivant une loi

quelconque vers un sommet M de cette ligne, le produit

$$|\sigma_0(A)|\overline{AM}^p,$$

où p représente un nombre positif constant *inférieur* à l'unité, reste, pour des valeurs assez petites de $\overline{AM}$, inférieur à une constante finie;

4° La fonction h_0 reste finie dans le voisinage de chaque sommet.

Cela posé, désignons par θ un des angles de la ligne (S), par R la plus petite des valeurs que prend le rapport

$$\frac{\pi}{|\pi - \theta|}$$

quand on envisage successivement tous les sommets de la ligne (S), et par (T) le domaine limité dans le plan de la variable complexe λ par un cercle de rayon R ayant l'origine des coordonnées pour centre. Les théorèmes suivants résumeront alors les principaux résultats que nous avons établis dans ce travail :

Théorème fondamental I. — *L'équation* (5) *admet, par rapport à l'inconnue u, une solution* $u(\lambda)$ [1], *fonction analytique du paramètre* λ. *Cette fonction du paramètre* λ *existe dans toute l'étendue du domaine* (T) *et n'admet, à l'intérieur de ce domaine, d'autres singularités que des pôles simples et réels faisant partie d'une suite de nombres réels et inégaux :*

$$(7) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots,$$

suite qui ne dépend que de la ligne (S) *dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, mais qui, dans le cas des potentiels logarithmiques généralisés, dépend encore du nombre caractéristique de ces potentiels. D'ailleurs la suite en question ne dépend en au-*

---

[1] Nous entendons par *solution de l'équation* (5) un potentiel de simple couche qui la vérifie en chaque point de la ligne (s) avec *exclusion,* cela va sans dire, des sommets et des points où la fonction σ_0 cesse d'être continue; nous supposons de plus que ce potentiel dérive d'une simple couche dont la densité σ satisfait aux conditions générales imposées à la fonction σ_0.

cune façon de la fonction σ_0 et l'on a

$$(8) \qquad |\lambda_1| \leqq |\lambda_2| \leqq |\lambda_3| \leqq \ldots < R.$$

A chaque terme λ_k de la suite (7), on peut faire correspondre un nombre fini, soit j_k, de potentiels de simple couche

$$(9) \qquad U_{k,1}, \quad U_{k,2}, \quad \ldots, \quad U_{k,j_k}$$

qui formeront ce que nous appellerons un *système complet* de fonctions fondamentales de M. Poincaré relatif au nombre λ_k et qui jouiront des propriétés suivantes :

1° Ces potentiels sont des potentiels logarithmiques ordinaires s'il en est ainsi du potentiel u; si, au contraire, u est un potentiel généralisé de nombre caractéristique μ, il en est de même des potentiels (9);

2° Les fonctions (9) sont linéairement indépendantes; en d'autres termes, aucune combinaison linéaire et homogène à coefficients constants de ces fonctions ne peut conserver une valeur constante dans toute l'étendue du plan.

3° On a, en chaque point de la ligne (S) distinct d'un sommet,

$$(10) \quad \left(\frac{dU_{kt}}{dN}\right)_i - \left(\frac{dU_{kt}}{dN}\right)_e = \lambda_k \left[\left(\frac{dU_{k,t}}{dN}\right)_i + \left(\frac{dU_{kt}}{dN}\right)_e\right] \quad (t = 1, 2, \ldots, j_k).$$

4° La valeur commune des deux membres de l'égalité (10) est une fonction qui ne peut devenir discontinue qu'aux sommets de la ligne (s) et, si l'on désigne par $\sigma_{kt}(A)$ la valeur de cette fonction en un point variable A situé sur la ligne (s) et par M l'un quelconque des sommets de cette ligne, le produit

$$(11) \qquad \overline{MA}^{p_k} \sigma_{kt}(A),$$

où p_k représente un nombre positif inférieur à l'unité, reste fini lorsque le point A tend vers le point M suivant une loi quelconque.

5° Lorsqu'un potentiel de simple couche U (bien entendu de la même nature que les autres potentiels considérés) satisfait à la relation

$$\left(\frac{dU}{dN}\right)_i - \left(\frac{dU}{dN}\right)_e = \lambda' \left[\left(\frac{dU}{dN}\right)_i + \left(\frac{dU}{dN}\right)_e\right],$$

où λ' représente une constante vérifiant l'inégalité

$$|\lambda'| < R,$$

et lorsque de plus la valeur commune des deux membres de l'équation précédente est une fonction qui vérifie les hypothèses générales faites au sujet de la fonction σ_0, le nombre λ' sera égal à l'un des nombres de la suite (7), soit à λ_k, et la fonction U sera une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des fonctions (9).

6° Lorsque la fonction $u(\lambda)$ admet le nombre λ_k pour pôle, le résidu correspondant est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des fonctions (9).

7° Dans le cas des potentiels logarithmiques généralisés, on a toujours

$$|\lambda_1| > 1, \tag{12}$$

tandis que, dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, on a

$$|\lambda_1| = 1.$$

En dehors de la solution analytique par rapport à λ dans le domaine (T), laquelle est unique, l'équation (5) peut admettre une solution non analytique dans ce domaine. La solution non analytique n'existera que dans le cas où tous les termes de la suite (7) ne seraient pas tous des pôles de la solution analytique, et alors les deux solutions ne différeront entre elles que pour des valeurs de λ égales à ceux des termes de la suite (7) qui ne sont pas des pôles de la solution analytique.

Théorème fondamental II. — *L'équation* (6) *admet, par rapport à l'inconnue* v, *une solution* [1] $v(\lambda)$, *fonction analytique du paramètre* λ *dans toute l'étendue du domaine* (T).

---

[1] Nous entendons par solution de l'équation (6) tout potentiel de double couche la vérifiant en chaque point de la ligne (S) où la fonction h_0 ne cesse pas d'être continue *sans exclusion des sommets* et dérivant, en outre, d'une double couche dont la densité h satisfait aux conditions générales imposées à la fonction h_0.

Cette fonction ne possède, à l'intérieur du domaine (T), d'autres singularités que des pôles simples et réels faisant partie de la suite (7). Le résidu relatif à un pôle quelconque λ_k sera un potentiel de double couche V_k, vérifiant l'équation

$$(V_k)_e - (V_k)_i = \lambda_k[(V_k)_e + (V_k)_i]$$

et dérivant d'une double couche dont la densité sera égale à la fonction à laquelle se réduit sur (S) une certaine fonction U_k, combinaison linéaire et homogène [1] à coefficients constants des fonctions (9); on aura à l'intérieur du domaine (D)

$$V_k = \frac{1-\lambda_k}{2\lambda_k} U_k,$$

et à l'intérieur du domaine (D')

$$V_k = \frac{1+\lambda_k}{2\lambda_k} U_k.$$

Enfin, en dehors de la solution analytique par rapport à λ dans le domaine (T), l'équation (6) pourra admettre une solution non analytique dans ce domaine. La solution non analytique n'existera que dans le cas où tous les termes de la suite (7) ne seraient pas tous des pôles de la solution analytique et alors les deux solutions ne différeront entre elles que pour les valeurs de λ égales à ceux des termes de la suite (7) qui ne sont pas des pôles de la solution analytique [2].

Il va sans dire que notre théorie comprend comme cas particulier le cas où la ligne (S) serait dépourvue de sommets. Le domaine (T) considéré dans l'énoncé des théorèmes précédents coïnciderait alors avec toute l'étendue du plan de la variable complexe λ.

---

(1) Il existe un cas exceptionnel où le mot *homogène* doit être supprimé dans l'énoncé précédent : c'est celui où, dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, on envisage le pôle, $\lambda_1 = -1$ et où la ligne (S) est telle que parmi les fonctions U_{1j} il en existe une irrégulière à l'infini et nulle sur (S).

(2) J'ai résumé sommairement les résultats précédents dans une Note insérée aux *Comptes rendus* le 6 juillet 1903.

II. — Propriétés fondamentales des potentiels.

5. Rapportons le plan à un système de coordonnées rectangulaires x, y et désignons : par r la distance du point courant $P(x, y)$ à un point B situé sur la ligne (S); par ds l'élément de cette ligne relatif au point B; par γ l'angle formé par le rayon $\overline{BP}$ avec la normale intérieure à la ligne (S) en B; par h et σ les valeurs en B de deux fonctions définies sur (S), fonctions que nous supposerons vérifier les conditions générales imposées (n° 4) aux fonctions σ_0 et h_0. Cela posé, considérons les potentiels logarithmiques généralisés de simple couche u et de double couche v définis par les équations

$$(1) \qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \sigma f(\mu r)\, ds$$

et

$$(2) \qquad v = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} h \frac{df(\mu r)}{dr} \cos_\gamma d^s.$$

On établira aisément les faits analytiques suivants :

1° La fonction u reste finie en chaque point de la ligne (S) et cela sans exclusion des sommets.

2° Lorsqu'un point A situé sur la ligne (S) n'est ni un sommet ni un point de discontinuité de la fonction σ, les quantités $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$ et $\left(\frac{du}{dN}\right)$ sont continues en ce point et l'on a

$$(3) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i - \left(\frac{du}{dN}\right)_e = \sigma,$$

ainsi que

$$(4) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i + \left(\frac{du}{dN}\right)_e = \sigma',$$

où σ' représente la fonction définie par l'équation suivante :

$$(5) \qquad \sigma' = \frac{-1}{\pi}\int_{(S)} \sigma \frac{df(r'\mu)}{dr'} \cos\alpha\, ds,$$

en désignant par r' la distance du point A à l'origine B de l'élément d'arc ds et par α l'angle formé par le vecteur AB avec la normale intérieure à la ligne (S) en A. J'ajoute que la fonction σ' définie par l'équation (5) ne peut avoir, en dehors des sommets de la ligne (S), aucun autre point de discontinuité.

3° Pourvu que la fonction h soit continue en un point A situé sur la ligne (S), ce point fût-il un sommet, les fonctions $(v)_i$ et $(v)_e$ seront continues en A et l'on aura en ce point

$$(6) \qquad (v)_i - (v)_e = h;$$

si, en outre, le point A n'est pas un sommet de la ligne (S), on aura encore

$$(v)_i + (v)_e = h',$$

en désignant par h' la fonction définie par l'équation suivante :

$$(7) \qquad h' = \frac{1}{\pi} \int_{(S)} h \frac{df(r'\mu)}{dr'} \cos\beta \, ds,$$

où β représente l'angle formé par la normale intérieure élevée à la ligne (S) au point B, origine de l'élément d'arc ds avec le vecteur $\overline{BA}$, de longueur r'.

4° La fonction h' n'admet, en dehors des sommets de la ligne (S), aucun autre point de discontinuité; en outre, elle est limitée, même dans le voisinage des sommets.

5° Désignons par $\varphi(x, y)$ un potentiel logarithmique généralisé dérivant d'une couche simple ou double portée par la ligne (S). Le produit

$$(8) \qquad \varphi(x, y)(x^2 + y^2)^m,$$

où m représente un nombre positif quelconque, tendra vers zéro en même temps que l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

et il en sera de même de tout produit que l'on obtiendrait en rempla-

çant la fonction $\varphi(x, y)$ par une de ses dérivées partielles d'ordre quelconque.

6. Considérons dans le plan trois points $A(x, y)$, $A_1(x_1, y_1)$ et $A_2(x, y)$, et posons

$$r_1 = \overline{AA_1}, \qquad r_2 = \overline{AA_2}, \qquad r = \overline{A_1A_2}.$$

Une application facile du théorème de Green permettra d'établir la relation suivante :

$$(9) \quad (m^2 - \mu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r_2 m) f(r_1 \mu)\, dx\, dy = 2\pi [f(rm) - f(r\mu)]$$

où, cela va sans dire, m et μ représentent deux nombres positifs. Cela posé, considérons quatre potentiels logarithmiques généralisés $\varphi(x, y)$, $u(x, y)$, $\psi(x, y)$ et $v(x, y)$ et supposons :

1° Que les potentiels φ et u de nombres caractéristiques m et μ dérivent d'une *même simple couche ;*

2° Que les potentiels ψ et v aient pour nombres caractéristiques respectifs les nombres caractéristiques m et μ des potentiels φ et u et dérivent d'une *même double couche*. On déduira aisément de la relation (9) les relations suivantes :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &(m^2 - \mu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(rm)\, u(x', y')\, dx'\, dy' \\ &\quad = 2\pi [\varphi(x, y) - u(x, y)] \end{aligned} \right.$$

et

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &(m^2 - \mu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(rm)\, v(x', y')\, dx'\, dy' \\ &\quad = 2\pi [\psi(x, y) - v(x, y)], \end{aligned} \right.$$

où r représente la distance des points (x, y) et (x', y').

J'ajoute que, dans les relations précédentes, il est permis de regarder u et v comme des potentiels logarithmiques ordinaires à condition de remplacer dans les premiers membres le facteur $m^2 - \mu^2$ par m^2. C'est ce que l'on vérifiera aisément au moyen d'une relation analogue à la relation (9).

Les fonctions de x et y formant les premiers membres des équations (10) et (11) rentrent dans la catégorie des fonctions $F(x, y)$ que l'on peut définir au moyen de la formule suivante :

$$(12) \qquad F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(rm)\, g(x', y')\, dx'\, dy',$$

où $g(x', y')$ représente une fonction donnée. Lorsque la fonction $g(x', y')$, continue en général, ne cesse de l'être que sur certaines lignes (L) et lorsqu'en outre elle est limitée, la fonction $F(x, y)$ jouit des propriétés suivantes :

1° Les dérivées premières sont finies et continues en chaque point du plan et l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(rm)}{\partial x}\, g(x', y')\, dx'\, dy',$$

avec une formule analogue pour $\frac{\partial F}{\partial y}$.

2° Si l'on désigne par $\mathcal{G}$ une limite supérieure des valeurs absolues de la fonction $g(x', y')$ et par DF l'une quelconque des dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}$, on a, en chaque point du plan :

$$(13) \qquad |F| < 2\pi \frac{\mathcal{G}}{m^2},$$

$$(14) \qquad |DF| < 4\pi \frac{\mathcal{G}}{m}.$$

7. Voici, sous forme de théorèmes, une série de propriétés des fonctions σ' et h' définies par les formules (5) et (7), propriétés qui nous seront indispensables dans la suite et que, avec un peu d'attention, on n'éprouvera pas de difficulté à établir.

Théorème I. — *Soient* M *un des sommets de la ligne* (S) *et* A *un autre point quelconque situé sur cette ligne.*

Supposons qu'il existe deux constantes positives δ_0 *et* E *telles que l'inégalité*

$$(15) \qquad \overline{MA} \leq \delta_0$$

entraîne l'inégalité suivante :

$$|(\sigma')_A| < \frac{E}{\overline{MA}^p}$$

où p représente un nombre positif inférieur à l'unité.

Si l'on impose à la constante δ_0 *la condition de ne pas dépasser une certaine limite* δ *dépendant uniquement des propriétés géométriques de la ligne* (S), *on pourra déterminer deux constantes positives* C_1 *et* C_2 *ne dépendant, comme* δ, *que des propriétés de la ligne* (S), *telles que l'inégalité* (15) *entraîne l'inégalité suivante :*

$$(16) \qquad |(\sigma')_A| < \frac{E}{\overline{MA}^p}\left[\frac{C_1}{1-p}\delta_0^{1-p} + \varphi(p)\right] + \frac{C_2}{\delta_0}\int_{(S)}|\sigma'|\,ds,$$

en désignant par $\varphi(p)$ *la fonction définie par l'équation suivante :*

$$(17) \qquad \varphi(p) = \frac{|\sin\theta|}{\pi}\int_0^1 \frac{z^{1-p} + z^{p-1}}{1 - 2z\cos\theta + z^2}\,dz$$

où θ *représente l'angle de la ligne* (S) *en* M.

J'ajoute que le théorème précédent subsiste sans aucun changement quand on remplace dans l'équation (5), servant de définition à la fonction σ', la fonction $f(\mu r)$ par la fonction $\log r$.

Théorème II. — *Désignons par l la distance d'un point* A *situé sur la ligne* (S) *au sommet le plus voisin. On aura, même dans le cas où l'on remplacerait la fonction* $f(\mu r)$ *par la fonction* $\log r$, *l'inégalité suivante :*

$$(18) \qquad |(\sigma')_A| < \frac{C_3}{l}\int_{(S)}|\sigma'|\,ds,$$

où C_3 *représente une constante positive dépendant* uniquement *de la ligne* (S).

Théorème III. — *Lorsque la valeur absolue de la fonction h entrant dans la formule* (7) *a une limite supérieure* H, *on a, en chaque*

point de la ligne (S), *à la fois les deux inégalités suivantes :*

$$(19) \qquad |h'| < \left(\frac{1}{R} + \frac{C_4}{\mu}\right) H$$

et

$$(20) \qquad |h'| < C_5 H$$

où l'on a désigné par R *le même nombre que page* 401 *et par* C_4 *et* C_5 *deux nombres positifs ne dépendant que de la ligne* (S). *Au surplus, l'inégalité* (20) *subsiste même dans le cas où, dans la formule* (7), *on remplacerait la fonction* $f(\mu, r)$ *par la fonction* $\log r$.

Théorème IV. — *On a à la fois les deux inégalités suivantes :*

$$(21) \qquad \int_{(S)} |\sigma'| ds < \left(\frac{1}{R} + \frac{C_4}{\mu}\right) \int_{(S)} |\sigma| ds$$

et

$$(22) \qquad \int_{(S)} |\sigma'| ds < C_5 \int_{(S)} |\sigma| ds$$

où les lettres R, C_4 *et* C_5 *représentent les mêmes nombres que dans les inégalités* (19) *et* (20). *Ajoutons que l'inégalité* (22) *subsiste même quand on remplace, dans la formule* (5), *la fonction* $f(\mu r')$ *par la fonction* $\log r'$.

Théorème V. — *Soit* δ' *une longueur au plus égale à une certaine longueur* δ *dépendant uniquement de la ligne* (S), *mais d'ailleurs quelconque. Décrivons de chaque sommet de la ligne* (S) *comme centre un cercle de rayon* δ' ; *désignons ensuite par* (S″) *l'ensemble des points de la ligne* (S) *situés à l'extérieur de tous ces cercles et par* (S′) *l'ensemble de tous les autres points de cette ligne. Cela posé, si* h' *est la fonction définie par la formule* (7) *ou par celle qui s'en déduit en remplaçant la fonction* $f(\mu r')$ *par la fonction* $\log r'$ *et si* H_1 *et* H_2 *sont les limites supérieures des valeurs absolues de la fonction* h *sur les portions* (S′) *et* (S″) *de la ligne* (S), *on aura, en chaque point de la portion* (S′) *de la ligne* (S), *l'iné-*

galité suivante :

$$(23) \qquad |h'| < \left(\frac{1}{R} + C_6\delta'\right) H_1 + \frac{C_7}{\delta'} H_2$$

où R *a la même signification que dans les théorèmes précédents, les lettres* C_6 *et* C_7 *désignant de nouvelles constantes positives ne dépendant que de la ligne* (S).

III. — Problème de Robin.

8. Nous entendons par *problème de Robin* le problème qui consiste à déterminer un potentiel de simple couche u vérifiant l'équation suivante :

$$(1) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i - \left(\frac{du}{dN}\right)_e + \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \left(\frac{du}{dN}\right)_e\right] + 2\sigma_0,$$

où σ_0 est une fonction donnée sur la ligne (S).

Nous supposerons d'abord que la fonction σ_0 ne peut cesser d'être continue qu'aux sommets de la ligne (S) et que l'on a

$$(2) \qquad |\sigma_0| < \frac{E_0}{l^{p'}},$$

où E_0 est une constante positive, p' un nombre positif inférieur à l'unité et l la distance du point auquel correspond la valeur considérée de σ_0 au sommet le plus voisin. Ce n'est qu'à la fin de ce Chapitre que nous nous placerons, en ce qui concerne la fonction σ_0, dans les conditions plus générales énoncées dans l'Introduction.

Il y a évidemment deux cas à distinguer suivant que u est un potentiel logarithmique généralisé ou un potentiel logarithmique ordinaire. Mais, dans ce numéro, nous n'établirons que des propositions où l'on n'a pas à distinguer ces deux cas.

Désignons par $\frac{\sigma}{\pi}$ la densité de la simple couche dont dérive le potentiel u. Nous aurons

$$(3) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i - \left(\frac{du}{dN}\right)_e = 2\sigma.$$

Cherchons à développer la fonction σ suivant les puissances de λ. Le terme indépendant de λ se réduira évidemment à σ_0. Nous pourrons donc poser

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \lambda^k. \tag{4}$$

Désignons par u_k le potentiel dérivant d'une simple couche de densité $\frac{\sigma_k}{\pi}$. Nous aurons

$$\left(\frac{du_k}{dN}\right)_i - \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e = 2\sigma_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

et

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k. \tag{6}$$

Cela posé, les équations (1), (5) et (6) donneront

$$2\sigma_{k+1} = \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i + \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Tous ces calculs reposent sur l'hypothèse que les développements en série que nous avons employés sont légitimes. Il faut donc s'assurer dans quelles conditions il en est bien ainsi. Il résulte immédiatement du théorème I du n° **7** que l'on pourra calculer, sans rencontrer aucun obstacle, autant de coefficients que l'on voudra dans les séries (4) et (6). Cette remarque faite, considérons la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{(s)} |\sigma_k| \, ds. \tag{8}$$

Le théorème IV du n° **7** nous apprend que le rayon de convergence ρ de cette série vérifiera l'inégalité suivante :

$$\rho \geqq \frac{1}{C_5}. \tag{9}$$

Voici, d'autre part, ce qui résulte du théorème II du n° **7** : si

l'on désigne par (S'') l'ensemble des points de la ligne (S) situés à l'*extérieur* des cercles de rayon commun η décrits des sommets de la ligne (S) comme centres, la série (4) convergera absolument et uniformément sur (S'') pour toute valeur de λ de module inférieur à ρ, et cela si petite que soit la longueur η. Donc, exception faite des sommets, la série (4) est absolument convergente (sans l'être uniformément) sur toute la ligne (S) pourvu que l'on ait

$$|\lambda| < \rho \tag{10}$$

où, comme cela résulte de l'inégalité (9), ρ représente un nombre positif *non nul*.

Comment se comporte la valeur $(\sigma)_A$ de la somme σ de la série (4) en un point A situé sur la ligne (S) lorsque le point A tend vers un sommet de cette ligne, le paramètre λ ayant, bien entendu, une valeur vérifiant l'inégalité (10)?

Nous répondrons à cette question en supposant que le paramètre λ vérifie, en même temps que l'inégalité (10), encore l'inégalité suivante :

$$|\lambda| < R, \tag{11}$$

où R représente le nombre considéré dans les théorèmes III et IV du n° **7**.

Le nombre λ ayant une valeur vérifiant à la fois les inégalités (10) et (11), désignons par R_1 un nombre quelconque vérifiant à la fois les trois inégalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} R_1 > |\lambda|, \\ R_1 < \rho, \\ R_1 < R. \end{array}\right. \tag{12}$$

Cela posé, considérons l'inégalité (16) du n° **7**. Il est aisé de voir qu'il est possible de donner au nombre p une valeur au moins égale à p' et assez voisine de l'unité, et au nombre δ_0 une valeur assez petite que nous supposerons être inférieure à l'unité, pour que l'inégalité

suivante :

$$\frac{C_1}{1-p}\,\delta_0^{1-p} + \varphi(p) \leqq \frac{1}{R_1}$$

soit vérifiée pour chacun des sommets de la ligne (S). Les nombres p et δ_0 étant choisis de cette façon, l'inégalité

$$\overline{MA} \leqq \delta_0,$$

où M est un des sommets de la ligne (S) et A un point quelconque situé sur elle, entraînera, en vertu de l'inégalité (2), l'inégalité

$$|(\sigma_0)_A| < \frac{E_0}{\overline{MA}^p},$$

laquelle, eu égard au choix des nombres p et δ_0 et au théorème I du n° 7, entraînera à son tour les inégalités que voici :

$$|(\sigma_k)_A| < \frac{E_k}{\overline{MA}^p} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

en posant

$$E_k = \frac{E_{k-1}}{R_1} + \frac{C_2}{\delta_0^{1-p}} \int_{(S)} |\sigma_{k-1}|\, ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

On conclura aisément de ces inégalités que la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k E_k,$$

entière en t, a R_1 pour rayon de convergence, et que, par conséquent, elle est absolument convergente pour $t = \lambda$. Cela étant, voici, on le reconnaîtra, avec un peu d'attention, la réponse que nous pouvons donner à la question que nous nous étions posée : *il est possible de faire correspondre à toute valeur de* λ *vérifiant à la fois les inégalités* (10) *et* (11) *un nombre positif* p *inférieur à l'unité, mais d'autant plus voisin de ce nombre que la différence* $R - |\lambda|$ *sera plus petite, tel que le produit* $(\sigma)_A l^p$, *où* l *représente la distance du point* A *au sommet le plus voisin de la ligne* (S), *reste inférieur en valeur absolue à un nombre fini indépendant de* l.

Voici les autres conséquences les plus importantes qui résultent de l'étude précédente de la série (4) :

1° Bien que cette série ne soit pas uniformément convergente sur la ligne (S), elle est cependant intégrable terme à terme pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité

$$|\lambda| < R', \tag{13}$$

où R' représente le plus petit des nombres R et ρ, lesquels, rappelons-le, sont l'un et l'autre différents de zéro;

2° Pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité précédente, la série (6) est absolument et uniformément convergente sur la ligne (S) et même dans toute région finie du plan [1] et la somme u de cette série représente le potentiel dérivant d'une simple couche de densité σ portée par la ligne (S);

3° Sous la même condition, on a

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e,$$

en chaque point de la ligne (S), pourvu que ce point ne soit pas un sommet, ce qui prouve que la fonction u, somme de la série (6), est une solution de l'équation (1) pour l'ensemble des valeurs de λ vérifiant l'inégalité (13).

9. Considérons, pour un moment, le cas particulier des potentiels logarithmiques ordinaires. On s'assurera aisément que, *dans ce cas*, les relations suivantes seront vérifiées :

$$\int_{S_i} \sigma_{k-1}\, ds + \int_{S_e} \sigma_k\, ds = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

on sait d'autre part que, pour qu'un potentiel logarithmique ordinaire dérivant d'une simple couche de densité σ représente une fonction

---

[1] On verra plus bas que, sauf un cas exceptionnel que nous indiquerons, l'inégalité (13) assure en réalité la convergence absolue et uniforme de la série (6) dans tout le plan.

harmonique régulière à l'infini, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\int_{(S)} v\, ds = 0;$$

en outre, lorsque cette condition est vérifiée, le potentiel considéré est nul à l'infini; enfin, lorsque la condition précédente n'est pas vérifiée, le potentiel en question est infini à l'infini. Voici ce que l'on peut conclure de tout cela en ce qui concerne la série (6) dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires.

1° Lorsque la condition

$$\int \sigma_0\, ds = 0 \tag{14}$$

n'est pas vérifiée, cette série n'est uniformément convergente dans tout le plan pour aucune valeur de λ différente de zéro.

2° Lorsqu'au contraire la condition (14) est vérifiée l'inégalité (13) assure la convergence absolue et uniforme de la série (6) dans tout le plan et la somme u de cette série représente une fonction harmonique régulière à l'infini. Pour établir ce point il n'y a qu'à tenir compte des deux faits suivants : d'une part les valeurs absolues des fonctions u_k atteindront leurs maxima en certains points situés sur la ligne (S) et d'autre part l'inégalité (13) assure la convergence absolue et uniforme de la série (6) sur la ligne (S) dans tous les cas.

Considérons maintenant le cas des potentiels généralisés. On sait qu'une fonction ψ vérifiant à l'intérieur d'un certain domaine l'équation suivante :

$$\Delta\psi - \mu^2\psi = 0,$$

où μ représente un nombre réel, ne peut avoir, à l'intérieur de ce domaine, ni un maximum positif ni un minimum négatif. On en conclura aisément que, dans le cas des potentiels généralisés, les valeurs absolues des fonctions u_k atteindront leurs maxima sur la ligne (S). Donc, dans ce cas encore, l'inégalité (13) assurera la convergence absolue et uniforme de la série (6) dans tout le plan.

Supposons que les conditions pour que le rayon de convergence absolue et uniforme R'' de la série (6) dans tout le plan soit différent

de zéro soient vérifiées et désignons par R_0 le plus petit des nombres R'' et R. D'après ce qui a été établi plus haut on aura

$$(15) \qquad R_0 \geqq R'.$$

Je dis que l'on a

$$R_0 = R'.$$

Rien d'essentiel ne distingue, dans la démonstration, le cas particulier des potentiels logarithmiques ordinaires.

Nous pourrons donc nous borner à considérer le cas des potentiels généralisés.

Désignons par Φ_k le potentiel généralisé de simple couche défini par l'équation suivante :

$$\left(\frac{d\Phi_k}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\Phi_k}{dN}\right)_e = 2\sigma_k$$

et posons

$$(16) \qquad w_k = \frac{m^2 - \mu^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(rm)\, u_k(x', y')\, dx'\, dy',$$

en désignant par r la distance des points (x, y) et (x', y').

On aura (n° **6**) :

$$u_k = \Phi_k - w_k,$$

ce qui donne :

$$(17) \qquad \int_{(S)} |\sigma_{k+1}|\, ds \leqq \frac{1}{2} \int_{(S)} \left| \left[\left(\frac{d\Phi_k}{dN}\right)_i + \left(\frac{d\Phi_k}{dN}\right)_e \right] \right| ds + \int_{(S)} \left| \frac{dw_k}{dN} \right| ds.$$

Désignons par S la longueur totale de la ligne (S) et par H_k le maximum du module de la fonction u_k ; soit en outre

$$m > \mu.$$

L'inégalité (14) du Chapitre précédent d'une part et le théorème IV du même Chapitre d'autre part permettront de déduire de l'inégalité (17) l'inégalité suivante :

$$\int_{(S)} |\sigma_{k+1}|\, ds < \left(\frac{1}{R} + \frac{C_4}{m}\right) \int_{(S)} |\sigma_k|\, ds + 2 S m H_k.$$

Le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k H_k$$

étant évidemment égal à R″, l'inégalité que nous venons d'obtenir prouve que le rayon de convergence de la série (8) est au moins égal au plus petit des nombres

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{C_4}{m}} \quad \text{et} \quad R''.$$

Mais on peut prendre m aussi grand que l'on voudra. Donc le rayon de convergence de la série (8) est au moins égal au plus petit des nombres R″ et R.

Par conséquent

$$R' \leqq R_0.$$

Cette inégalité entraîne, à cause de l'inégalité (15), la relation (16) qu'il s'agissait précisément de démontrer.

10. Considérons maintenant les intégrales de M. Poincaré [1] :

$$(18) \quad \begin{cases} W'_{j+k} = \iint_{(D')} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial u_k}{\partial y} + \mu^2 u_j u_k \right) dx\, dy, \\ W_{j+k} = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial u_k}{\partial y} + \mu^2 u_j u_k \right) dx\, dy, \end{cases}$$

où, comme l'indiquent les indices, les intégrations doivent être étendues : dans la première au domaine extérieur (D′) et dans la seconde au domaine intérieur (D) de la ligne (S); dans le cas particulier des potentiels logarithmiques ordinaires on devra faire $\mu = 0$ et admettre en outre que la condition (14) est vérifiée, sans quoi les intégrales W'_{i+k} cesseraient d'avoir un sens.

---

(1) Poincaré, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*, 1896). *Voir* aussi mon Mémoire : *Sur l'intégration de l'équation* $\Delta u + \xi u = 0$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1902).

Cela posé, on justifiera la notation adoptée en prouvant que les intégrales considérées ne dépendent que de la somme des indices j et k, on établira en même temps la relation suivante :

$$W_n + W'_n = W_{n-1} - W'_{n-1}, \tag{19}$$

et l'on en conclura que la suite infinie

$$\frac{W'_0 + W_0}{W'_2 + W_2}, \quad \frac{W'_2 + W_2}{W'_4 + W_4}, \quad \frac{W'_4 + W_4}{W'_6 + W_6}, \quad \ldots, \tag{20}$$

évidemment à termes positifs, est convergente et décroissante (ou du moins non croissante) et que la limite de cette suite ne peut être inférieure à l'unité. Désignons par R''' le nombre positif dont le carré est égal à la limite de la suite (20). On prouvera aisément que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (W'_k + W_k)$$

a R'' pour rayon de convergence. Or cette série est identique à la série suivante :

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{(S)} u_k \sigma_0 \, ds,$$

dont le rayon de convergence est au moins égal à R''.

On aura donc

$$R''' \geqq R''.$$

Par conséquent, si l'on désigne par R'_0 le plus petit des nombres R''' et R; on aura

$$R'_0 \geqq R_0. \tag{21}$$

Je dis que l'on a

$$R'_0 = R_0. \tag{22}$$

Dans le cas particulier des potentiels logarithmiques ordinaires, on doit évidemment admettre que la fonction σ_0 satisfait à l'équation (14);

nous supposerons en outre que, dans ce cas, l'on a

$$R''' > 1; \tag{23}$$

on verra que cette restriction ne nous gênera en rien. D'ailleurs la démonstration, dans le cas des potentiels généralisés, ne se distingue de celle où l'on considère les potentiels ordinaires que par des modifications faciles à apercevoir, modifications qui sont en même temps des simplifications sensibles liées à ce fait que, dans le cas des potentiels généralisés, les hypothèses exprimées par les relations (14) et (23) deviennent superflues. Cela nous permettra de n'envisager que le cas des potentiels logarithmiques ordinaires.

Considérons sur la ligne (S) deux points A et B; soit r' leur distance, et β l'angle formé par la direction BA avec la normale intérieure en B à la ligne (S).

Le point A étant fixe, l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\cos\beta}{r'} - \frac{1}{S}\right)$$

représentera une fonction déterminée du point B. Soit P le potentiel logarithmique ordinaire dérivant d'une simple couche dont la densité serait égale à la fonction précédente [1]; nous aurons

$$\left(\frac{dP}{dN}\right)_i - \left(\frac{dP}{dN}\right)_e = \frac{1}{\pi}\frac{\cos\beta}{r'} - \frac{1}{S}. \tag{24}$$

Posons

$$K(A) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy. \tag{25}$$

La fonction K(A) du point A ne pourra cesser d'être continue qu'aux sommets de la ligne (S).

---

[1] L'idée d'introduire la fonction P nous a été suggérée par le Mémoire de M. E.-R. Neumann : *Neue Integraleigenschaften successiver Potentiele* (*Göttinger Nachrichten*, 1902).

Moyennant la relation

$$(26) \qquad (u_k)_A = \frac{-1}{\pi} \int_{(S)} u_{k-1} \frac{\cos\beta}{r'} ds,$$

facile à établir, l'équation (24) donne

$$(u_k)_A + \frac{1}{S} I_{k-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

en posant

$$I_{k-1} = \int_{(S)} u_{k-1}\, ds.$$

On déduit immédiatement de la relation précédente les inégalités suivantes :

$$(27) \qquad \left| u_k + \frac{1}{S} I_{k-1} \right| < \sqrt{K(A)} \sqrt{W'_{2k-2} + W_{2k-2}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Considérons maintenant deux potentiels logarithmiques de simple couche Φ_0 et Φ, définis au moyen des équations suivantes :

$$\left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_e = 1,$$

$$(28) \qquad \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e = -\left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_e - 1.$$

Le potentiel Φ représentera une fonction harmonique régulière à l'infini. Cela posé, multiplions l'équation (28) par $u_{k-1}\, ds$ et intégrons l'équation obtenue en étendant l'intégration à toute la ligne (S); il viendra

$$(29) \qquad I_k + I_{k-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial u_{k-1}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

en s'appuyant d'une part sur (26) et, d'autre part, sur l'expression connue de la somme

$$\left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_i + \left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_e.$$

En s'appuyant sur l'inégalité de Schwarz, on déduira de (29) l'iné-

galité suivante :

$$(30) \qquad |I_k + I_{k-1}| < B\sqrt{W'_{2k-2} + W_{2k-2}},$$

où l'on a désigné par B le nombre positif défini au moyen de l'équation

$$B^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy.$$

Les inégalités (27) et (30) donnent

$$(31) \qquad |u'_k| < \left[2\sqrt{K(A)} + \frac{B}{S}\right]\sqrt{W'_{2k-2} + W_{2k-2}},$$

en posant

$$(32) \qquad u'_k = u_{k+1} + u_k,$$

et en tenant compte de ce que l'on a

$$W'_{2k} + W_{2k} \leqq W'_{2k-2} + W_{2k-2}.$$

Posons encore

$$(33) \qquad \sigma'_k = \sigma_{k+1} + \sigma_k,$$

et faisons la remarque suivante : si l'on remplace dans l'équation (1) les fonctions σ_0 et u par les fonctions σ'_0 et u', les séries (4) et (6) deviendront identiques aux séries suivantes :

$$(34) \qquad \sigma' = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma'_k \lambda^k,$$

$$(35) \qquad u' = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k \lambda^k.$$

Reportons-nous maintenant au théorème V du Chapitre précédent, et désignons par $H_1^{(k)}$ et $H_2^{(k)}$ les maxima des valeurs absolues de la fonction u'_k sur les portions (S′) et (S″) de la ligne (S); nous aurons

$$(36) \qquad H_1^{(k+1)} < \left(\frac{1}{R} + C_6\delta'\right) H_1^{(k)} + \frac{C_7}{\delta'} H_2^{(k)}.$$

Désignons par $F(\delta')$ le maximum de l'expression

$$2\sqrt{K(A)} + \frac{B}{S}$$

lorsque le point A décrit la portion (S'') de la ligne (S). La quantité $F(\delta')$ représentera, pour toute valeur de δ' différente de zéro, un nombre positif fini d'autant plus grand que δ' sera plus petit, et l'inégalité (31) nous donnera

$$H_2^{(k)} < F(\delta')\sqrt{W'_{2k-2} + W_{2k-2}},$$

d'où

$$(37) \qquad H_2^{(k)} < F(\delta')\frac{\sqrt{W'_0 + W_0}}{R_0'^{k-1}},$$

Soit a le plus petit des nombres

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + C_6\delta'} \quad \text{et} \quad R'_0,$$

les inégalités (36) et (37) donneront

$$H_1^{(k+1)} < \frac{H_1^{(k)}}{a} + \frac{C_7 F(\delta')}{\delta'}\frac{\sqrt{W'_0 + W_0}}{a^{k-1}},$$

ce qui donne

$$(38) \qquad H_1^{(k)} < \left[H_1^{(1)} + (k-1)\frac{C_7 F(\delta')}{\delta'} a\sqrt{W'_0 + W_0}\right]\frac{1}{a^{k-1}}.$$

Désignons par $F_1(\delta')$ le plus grand des deux nombres

$$F(\delta') \quad \text{et} \quad \frac{C_7 F(\delta')}{\delta'} R,$$

il résulte des inégalités (37) et (38) que l'on aura, en chaque point de la ligne (S),

$$(39) \quad |u'_k| < \left[H_1^{(1)} + (k-1)F_1(\delta')\sqrt{W'_0 + W_0}\right]\frac{1}{a^{k-1}} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Cela prouve que, pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité

$$|\lambda| < a,$$

la série (35) est absolument et uniformément convergente dans tout le plan. D'ailleurs, la différence $R'_0 - a$ peut être rendue égale à zéro lorsque $R'_0 < R$ et aussi petite que l'on voudra lorsque $R'_0 = R$: il n'y a qu'à attribuer à δ' une valeur assez petite.

Il résulte de là que l'inégalité

$$|\lambda| < R'_0 \tag{40}$$

assure la convergence absolue et uniforme de la série (35) dans tout le plan. Il s'ensuit (n° **9**) que l'inégalité précédente assure aussi la convergence absolue de la série (34). Il résulte d'ailleurs de l'inégalité (23) que l'on a

$$R'_0 > 1.$$

Par conséquent, les séries (34) et (35) convergeront absolument pour $\lambda = -1$. On en conclura au moyen des relations (33) et (32) que l'on a

$$\lim \sigma_{2k} = -\lim \sigma_{2k+1} = \varphi,$$
$$\lim u_{2k} = -\lim u_{2k+1} = \psi,$$

en désignant par φ une fonction [définie sur la ligne (S)] vérifiant les hypothèses énoncées au sujet de la fonction σ_0 au début du n° **8**, et par ψ le potentiel de simple couche défini par l'équation

$$\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\psi}{dN}\right)_e = 2\varphi.$$

Cela posé, on s'assurera que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy = \lim_{k=\infty}(W'_{2k} + W_{2k}).$$

Or, en vertu de l'inégalité (23), on a

$$\lim_{k=\infty}(W'_{2k} + W_{2k}) = 0,$$

par conséquent, la fonction ψ, nulle à l'infini, sera nulle dans tout le plan. On aura donc

$$\lim_{k=\infty} I_k = 0,$$

ce qui permet de déduire de l'inégalité (30) l'inégalité suivante :

$$|I_{k-1}| < B \sum_{j=k-1}^{\infty} \sqrt{W'_{2j} + W_{2j}},$$

mais

$$\sqrt{W'_{2j+2} + W_{2j+2}} < \frac{1}{R'''} \sqrt{W_{2j} + W_{2j}},$$

on aura donc

$$|I_{k-1}| < \frac{BR'''}{R''' - 1} \sqrt{W'_{2k-2} + W_{2k-2}},$$

et l'on conclura, au moyen de cette inégalité, de l'inégalité (27), l'inégalité suivante :

$$(41) \quad |(u_k)_A| < \frac{BR'''}{S(R''' - 1)} \sqrt{W'_{2k-2} + W_{2k-2}} + \sqrt{K(A)} \sqrt{W'_{2k-2} + W_{2k-2}}.$$

Un raisonnement identique à celui qui nous a permis de déduire de l'inégalité (31) l'inégalité (39) permettra de déduire de l'inégalité (41) les inégalités suivantes :

$$(42) \quad |u_k| < \left[H_1 + (k-1)\Omega(\delta')\sqrt{W'_0 + W_0}\right] \frac{1}{a^{k-1}} \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

où l'on a désigné par a, comme dans l'inégalité (39), le plus petit des nombres

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + c_0 \delta'} \qquad \text{et} \qquad R'_0,$$

par H_1 le maximum du module de la fonction u_1 et par $\Omega(\delta')$ une fonction de δ' ayant une valeur positive finie pour toute valeur de δ' différente de zéro, cette valeur étant d'autant plus grande que δ' est plus petit; j'ajoute que la forme de la fonction $\Omega(\delta')$ dépend uniquement de la ligne (S).

On conclura immédiatement de l'inégalité (42) que l'inégalité

$$|\lambda| < R'_0$$

assure la convergence absolue et uniforme de la série (6) dans tout le plan. On aura donc

$$R_0 \geqq R'_0,$$

inégalité qui, jointe à l'inégalité (21), entraîne la relation (22) qu'il s'agissait précisément de démontrer.

11. Lorsque la fonction σ_0 satisfait aux hypothèses du n° **8** et lorsque, dans le cas particulier des potentiels logarithmiques ordinaires, elle vérifie encore la relation (14), la démonstration du théorème fondamental I de l'introduction n'exigerait plus maintenant que la reproduction, avec quelques modifications évidentes, des considérations développées dans les numéros de **9** à **14** inclusivement, de mon Mémoire *Sur l'intégration de l'équation*

$$\Delta u + \xi u = 0 \quad (^1).$$

Nous admettrons donc que, avec les restrictions que nous venons d'énoncer, le théorème en question est établi. Voyons comment on peut s'affranchir de ces restrictions.

Considérons le cas des potentiels logarithmiques ordinaires sans admettre que la relation (14) soit vérifiée. Posons alors

$$u = \frac{\lambda u' + u_0}{1 + \lambda}, \tag{43}$$

en désignant par u' un nouveau potentiel logarithmique ordinaire de simple couche. En portant cette valeur de u dans l'équation (1) on trouvera

$$\left(\frac{du'}{dN}\right)_i - \left(\frac{du'}{dN}\right)_e = \lambda\left[\left(\frac{du'}{dN}\right)_i + \left(\frac{du'}{dN}\right)_e\right] + 2\sigma',$$

(1) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1902.

en posant

$$\sigma' = \sigma_0 + \sigma_1.$$

La relation

$$\int \sigma' \, ds = 0$$

étant satisfaite dans tous les cas, la substitution (43) ramène le cas où la relation (14) n'est pas vérifiée à celui où elle a lieu.

Montrons enfin qu'il est aisé de s'affranchir de la restriction qui consiste à admettre que la fonction σ_0 satisfait aux hypothèses du numéro **8**. En effet, supposons que cette fonction ne vérifie que les conditions spécifiées dans l'énoncé du théorème fondamental I et posons

$$u = u_0 + \lambda u'. \tag{44}$$

L'équation (1) nous donnera

$$\left(\frac{du'}{dN}\right)_i - \left(\frac{du'}{dN}\right)_e = \lambda\left[\left(\frac{du'}{dN}\right)_i + \left(\frac{du'}{dN}\right)_e\right] + 2\sigma_1.$$

Or la fonction σ_1 satisfera, on le prouvera sans peine, aux hypothèses faites au numéro **8** au sujet de la fonction σ_0. Par conséquent, la substitution (44) ramène le cas général au cas particulier où le théorème fondamental I est déjà démontré.

La discussion des pôles $+1$ et -1 que peut avoir la fonction u du paramètre λ dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires présente un intérêt évident; elle pourra être faite par une méthode analogue à celle dont je me suis servi, pour trois variables indépendantes, dans mon Mémoire *Sur les méthodes de la moyenne arithmétique de Neumann et de Robin dans le cas d'une frontière non connexe* (¹).

12. Reportons-nous au théorème fondamental I de l'Introduction et considérons la suite

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \tag{45}$$

(¹) *Bulletin de l'Académie de Cracovie,* octobre 1902.

ainsi que le système complet de fonctions fondamentales

$$(46) \qquad U_{k,1}, \quad U_{k,2}, \quad \ldots, \quad U_{k,j_k}$$

correspondant au terme λ_k de cette suite. Nous nous proposons de faire au sujet des fonctions précédentes quelques remarques qui nous seront utiles au Chapitre suivant.

Posons

$$U'_{k,\alpha} = \sum_{\beta=1}^{j_k} a_{\alpha,\beta} U_{k,\beta},$$

en désignant par les $a_{\alpha,\beta}$ des constantes quelconques à cela près que le déterminant suivant

$$|a_{\alpha,\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots, j_k)$$

soit différent de zéro. Il est évident que le système de fonctions

$$U'_{k,1}, \quad U'_{k,2}, \quad \ldots, \quad U'_{k,j_k}$$

pourra être considéré comme formant un système complet de fonctions fondamentales relatives au terme λ_k de la suite (45) au même titre que le système (46). Il est aisé de voir que, sauf une restriction que nous indiquerons tout à l'heure, il est possible de disposer des constantes $a_{\alpha\beta}$ de façon :

1° Que les relations suivantes :

$$\int_{(S)} \left(\frac{dU'_{kt}}{dN}\right)_i U'_{k't'} ds = \int_{(S)} \left(\frac{dU'_{k,t}}{dN}\right)_e U'_{k,t'} ds = 0,$$

lesquelles auront lieu dans tous les cas sous la condition $k \neq k'$, aient encore lieu toutes les fois que l'on a $t \neq t'$, même si l'on avait en même temps $k = k'$;

2° Que l'on ait

$$\int_{(S)} \left[\left(\frac{dU'_{kt}}{dN}\right)_i - \left(\frac{dU'_{kt}}{dN}\right)_e\right] U'_{kt} ds = -1.$$

Il est donc permis de supposer, comme nous allons le faire doréna-

vant, que le système (46) soit constitué de telle sorte que la relation

$$(47)\qquad \int_{(S)}\left[\left(\frac{dU_{kt}}{dN}\right)_i-\left(\frac{dU_{kt}}{dN}\right)_e\right]U_{kt}=-1$$

ait lieu pour toutes les valeurs des indices k et t et que l'on ait

$$(48)\qquad \int_{(S)}\left[\left(\frac{dU_{kt}}{dN}\right)_i U_{k',t'}ds=\int_{(S)}\left(\frac{dU_{k,t}}{dN}\right)_e U_{k',t'}ds=0,$$

à moins d'avoir à la fois

$$k=k' \qquad \text{et} \qquad t=t'.$$

Cela posé, désignons par U_k le résidu relatif au pôle λ_k de la fonction u définie par l'équation (1).

D'après le théorème fondamental I, nous aurons

$$(49)\qquad U_k=\sum_{j=1}^{j_k} C_{kj}U_{kj}$$

et l'on prouvera aisément que l'on a

$$(50)\qquad C_{kj}=2\lambda_k\int_{(S)}\sigma_0 U_{kj}ds.$$

Voici maintenant la restriction que l'on doit apporter à ce qui précède. Dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, il peut arriver que, parmi les fonctions fondamentales relatives au pôle $\lambda_1=-1$, il en existe une, nécessairement irrégulière à l'infini, se réduisant à zéro sur la ligne (S); c'est ce qui se présente par exemple pour un cercle de rayon égal à l'unité. Dans ce cas, il sera impossible, on le prouvera sans peine, de faire en sorte que toutes les fonctions fondamentales relatives au pôle -1 satisfassent à la condition (47). Mais on pourra toujours s'arranger de façon qu'il n'y ait exception que pour une de ces fonctions, soit $U_{1,1}$, et que les autres soient, en outre, toutes régulières à l'infini. Nous admettrons que l'on ait réalisé ces conditions et nous assujettirons alors la fonction $U_{1,1}$ à la condition

suivante :

$$(51) \qquad \int_{(S)} \left(\frac{dU_{1,1}}{dN}\right)_e ds = 1,$$

au lieu d'imposer à cette fonction la condition (47) à laquelle, comme nous venons de le voir, il peut n'être pas possible de satisfaire.

D'ailleurs aucune modification ne devra être apportée à ce que nous avons dit au sujet des relations (48).

Ces conventions admises, la formule (50) devra être remplacée, dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires pour $k = j = 1$, par la formule suivante :

$$(52) \qquad C_{11} = -2 \int_{(S)} \sigma_0 ds.$$

IV. — Problème de Neumann.

13. Nous entendons par *problème de Neumann,* le problème qui consiste à déterminer un potentiel logarithmique (généralisé ou ordinaire) de double couche portée par la ligne (S), tel que l'on ait

$$(1) \qquad (v)_e - (v)_i = \lambda[(v)_e + (v)_i] + 2h_0,$$

où h_0 est une fonction donnée sur la ligne (S) et λ une paramètre variable.

Nous n'envisagerons *dans ce numéro* que le cas *particulier* où h_0 peut être regardé comme la valeur périphérique d'une fontion φ qui jouit des propriétés suivantes : dans toute l'étendue du domaine (D) et même sur la frontière (S) de ce domaine, la fonction φ est finie et continue; la quantité $\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)_i$ satisfait aux conditions générales imposées à la fonction σ_0 au numéro **4**; enfin, la fonction F, définie par l'équation suivante :

$$F = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

est continue en chaque point situé à l'*intérieur* du domaine (D) et elle est limitée dans toute l'étendue de ce domaine.

Les hypothèses précédentes relatives à la fonction h_0 permettront

d'appliquer au problème de Neumann la méthode que nous avons eu l'occasion d'appliquer au même problème dans le cas de trois variables indépendantes [1].

Désignons par v_0 le potentiel de double couche défini par l'équation suivante :

$$(v_0)_e - (v_0)_i = 2h_0.$$

La fonction

$$\frac{dv_0}{dN} = \left(\frac{dv_0}{dN}\right)_e = \left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i$$

existera et, si l'on détermine la fonction σ_0 qui entre dans l'équation (1) du Chapitre précédent, au moyen de l'équation suivante :

$$\sigma_0 = \frac{dv_0}{dN}, \tag{2}$$

cette fonction satisfera aux conditions voulues pour que le théorème fondamental I de l'Introduction lui soit applicable.

La fonction σ_0 étant définie au moyen de l'équation (2), le potentiel de double couche v défini par la formule

$$v = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)}\left[\frac{\lambda u + (v_0)_i}{\lambda + 1} + \frac{\lambda u + (v_0)_e}{\lambda - 1}\right]\frac{df(r\mu)}{dr}\cos\gamma\, ds, \tag{3}$$

où, dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, la fonction $f(r\mu)$ serait à remplacer par la fonction $\log r$, vérifiera l'équation (1). On en conclura de suite que, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés en ce qui concerne la fonction h_0, l'équation (1) admet une solution analytique par rapport à λ, jouissant de toutes les propriétés spécifiées dans l'énoncé du théorème fondamental II de l'Introduction.

La remarque suivante nous sera utile plus tard : soit V_k le résidu relatif au pôle λ_k de la fonction v du paramètre λ, nous aurons

$$(V_k)_e + (V_k)_i = 2\sum_{j=1}^{jk} C_{kj} U_{kj}, \tag{4}$$

---

[1] Zaremba, *Sur l'intégration de l'équation* $\Delta u + \xi u = 0$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* fasc. I, 1902, p. 103 et suivantes).

où les C_{kj} représentent des constantes déterminées au moyen des formules suivantes :

$$(5)\qquad C_{kj} = \int_{(S)} h_0 \left[\left(\frac{dU_{kj}}{dN} \right)_i - \left(\frac{dU_{kj}}{dN} \right)_e \right] ds \qquad (j = 1, 2, \ldots, j_k),$$

pourvu que, dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, on convienne de remplacer, dans la formule (4), pour $k = 1$, le symbole $U_{1,1}$ par l'unité.

14. Revenons au problème de Neumann, mais excluons maintenant le cas des potentiels logarithmiques ordinaires en ne faisant, en revanche, au sujet de la fonction h_0, que les hypothèses générales énoncées au n° **4**.

En vue d'applications ultérieures, nous désignerons dans ce numéro le potentiel cherché par w, et par m le nombre caractéristique de ce potentiel, au lieu de désigner ces éléments, comme dans les autres parties du travail, par v et μ.

Nous aurons

$$(6)\qquad (w)_e - (w)_i = \lambda[(w)_e + (w)_i] + 2h_0.$$

Désignons par h l'expression qui forme le second membre de cette équation et voyons s'il est possible de développer la fonction h, suivant les puissances de λ, en une série de la forme

$$(7)\qquad h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \lambda^k.$$

Cela donnerait

$$(8)\qquad w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \lambda^k,$$

les w_k étant les potentiels de double couche définis par les équations suivantes :

$$(9)\qquad (w_k)_e - (w_k)_i = 2h_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

L'équation (6) donnerait

$$(9) \qquad (w_k)_e + (w_k)_i = 2h_{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$(10) \qquad h_{k+1} = -\frac{1}{\pi}\int_{(S)} h_k \frac{df(r'm)}{dr'}\cos\beta\, ds \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

où r' et β ont la même signification que dans la formule (7) du n° **5**.

Désignons par H_k une limite supérieure du module de h_k; nous aurons

$$(11) \qquad H_{k+1} < \left(\frac{1}{R} + \frac{C_4}{m}\right) H_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

en vertu du théorème III du Chapitre II. Cela prouve que, sous la condition

$$(12) \qquad |\lambda| < \frac{R}{1 + \frac{RC_4}{m}},$$

tous les développements en série que nous venons de considérer seront absolument et uniformément convergents dans les domaines où l'on a à les envisager. Ces développements sont par conséquent légitimes, et le problème de Neumann est résolu au moyen de la série (8) pour l'ensemble des valeurs de λ vérifiant l'inégalité (12).

15. Nous avons établi, au n° **13**, que le problème de Neumann admet une solution analytique par rapport au paramètre λ, jouissant des propriétés spécifiées dans le théorème fondamental II de l'Introduction, lorsque la fonction h_0 satisfait à certaines conditions particulières. Proposons-nous maintenant d'étendre ce résultat au cas où cette fonction ne vérifie que les hypothèses beaucoup plus générales dans lesquelles nous nous sommes placés au numéro précédent.

J'observe d'abord que, sans nuire à la généralité, nous pouvons admettre que la fonction h_0 est limitée. En effet, soit toujours v_0 le potentiel de double couche défini par l'équation

$$(v_0)_e - (v_0)_i = 2h_0.$$

Posons

$$v = v_0 + \lambda v'. \tag{13}$$

La fonction v' représentera un potentiel de double couche vérifiant l'équation suivante :

$$(v')_e - (v')_i = \lambda[(v')_e + (v')_i] + 2h_1$$

où

$$2h_1 = (v_0)_e + (v_0)_i.$$

La fonction h_1 étant limitée (n° 5), on voit que la substitution (13) ramène le cas général à celui où la fonction h_0 est limitée. Nous supposerons donc dans la suite qu'elle satisfasse à cette condition.

Cherchons à résoudre l'équation (1) pour l'ensemble des valeurs de λ vérifiant l'inégalité suivante :

$$|\lambda| < a, \tag{14}$$

en désignant par a un nombre positif donné, tel cependant que l'on ait

$$1 < a < R. \tag{15}$$

Nous pourrons nous borner au cas des potentiels logarithmiques ordinaires, cas qui ne se distingue du cas général que par la complication un peu plus grande du raisonnement.

Considérons le potentiel généralisé w vérifiant l'équation (6) et donnons au nombre caractéristique m de ce potentiel une valeur telle que l'on ait

$$\frac{R}{1 + \frac{c_4 R}{m}} = a. \tag{16}$$

La chose sera possible puisque a est inférieur à R. Dans ces conditions la formule (8) fera connaître la fonction w pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (14). Cela posé, désignons par φ le potentiel logarithmique ordinaire dérivant d'une double couche de *même den-*

sité que celle dont dérive le potentiel w et posons

$$\psi = \varphi - w. \tag{17}$$

La fonction ψ et ses dérivés premières, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, seront continues (n° **6**), même à la traversée de la ligne (S). Posons

$$v = \varphi + \lambda Q, \tag{18}$$

en désignant par Q un nouveau potentiel logarithmique ordinaire de double couche. L'équation (1) donnera

$$(Q)_e - (Q)_i = \lambda[(Q)_e + (Q)_i] + 2(\psi)_s, \tag{19}$$

en désignant par $(\psi)_s$ la fonction à laquelle se réduit sur (S) la fonction ψ et en tenant compte des équations (6) et (17).

16. Désignons par H_0 une limite supérieure du module de la fonction h_0. Nous aurons, en dehors des inégalités (11), encore l'inégalité suivante :

$$H_1 < \left(\frac{1}{R} + \frac{C_4}{m}\right) H_0;$$

on aura donc

$$|h_k| < \frac{H_0}{a^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

à cause de la relation (16).

Désignons par φ_k le potentiel logarithmique ordinaire de double couche défini par l'équation suivante :

$$(\varphi_k)_e - (\varphi_k)_i = 2h_k.$$

Le théorème III du Chapitre II et les inégalités (20) nous donneront aisément

$$|\varphi_k| < (1 + C_5)\frac{H_0}{a^k}.$$

Cela prouve que, pour les valeurs de λ vérifiant l'inégalité (14), la fonction φ, introduite au numéro précédent, pourra être calculée au

moyen de la série suivante :

$$(21) \qquad \varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \lambda^k.$$

On aura donc

$$(22) \qquad \psi = \sum_{k=0} \psi_k \lambda^k,$$

pour les mêmes valeurs de λ, en posant

$$\psi_k = \varphi_k - w_k.$$

On aura d'ailleurs

$$(23) \qquad |w_k| < (1 + C_3) \frac{H_0}{a^k},$$

en vertu du théorème III du Chapitre II; par conséquent,

$$(24) \qquad |\psi_k| < 2(1 + C_3) \frac{H_0}{a^k}.$$

On verra, en se reportant au n° **6**, que la fonction ψ_k et ses dérivées du premier ordre, $\frac{\partial \psi_k}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi_k}{\partial y}$, seront continues même à la traversée de la ligne (S) et l'on s'assurera ensuite que l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy$$

a un sens. Cherchons une limite supérieure de cette intégrale. L'équation

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} + m^2 w_k = 0,$$

que la fonction ψ_k vérifie en vertu de sa définition, donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy = m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k w_k\, dx\, dy,$$

d'où, à cause de (24),

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy \\ &\quad < 2m^2(1+C_5)\frac{H_0}{a^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|w_k|\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Pour trouver une limite supérieure de l'intégrale qui figure au second membre de cette inégalité, décrivons dans le plan des (x, y) un cercle (Σ) de rayon L assez grand pour que la ligne (S) tout entière se trouve à l'intérieur de ce cercle. Cela posé, décomposons l'intégrale qui nous occupe en deux parties J et J′ se rapportant respectivement à la partie du plan limitée par le cercle (Σ) et à la région du plan extérieure à ce cercle. Remplaçons dans l'intégrale J la quantité $|w_k|$ par la limite supérieure que lui assigne l'inégalité (23) et observons que, à l'extérieur du cercle (Σ), une limite supérieure de la fonction $|w_k|$ nous est fournie, comme on le prouvera avec un peu d'attention, par l'expression suivante :

$$\frac{f(rm)}{f(Lm)}(1+C_5)\frac{H_0}{a^k},$$

où r représente la distance du point où l'on considère la fonction $|w_k|$ au centre du cercle (Σ). Nous trouverons aisément

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|w_k|\,dx\,dy < B'\frac{H_0}{a^k},$$

en désignant par B′ une quantité ne dépendant ni de l'indice k, ni de la fonction h_0. L'inégalité (25) donnera alors

$$(26)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy < \left(B\frac{H_0}{a^k}\right)^2,$$

où B représente un nombre qui, comme le nombre B′, ne dépend ni de l'indice k, ni de la fonction h_0.

17. Pour calculer le potentiel de double couche Q, portons dans l'équation (19) la valeur (22) de ψ et voyons s'il est possible de satis-

faire à cette équation en posant

$$(27) \qquad Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \lambda^k,$$

les fonctions Q_k étant des potentiels logarithmiques ordinaires de double couche vérifiant les équations suivantes :

$$(28) \quad (Q_k)_e - (Q_k)_i = \lambda[(Q_k)_e + (Q_k)_i] + 2(\psi_k)_s \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

où $(\psi_k)_s$ représente la fonction à laquelle se réduit la fonction ψ_k sur la ligne (S).

Nous avons déjà eu l'occasion de faire remarquer que la fonction ψ_k et ses dérivées du premier ordre $\frac{\partial \psi_k}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi_k}{\partial y}$ sont continues, même à la traversée de la surface (S) et que l'on a

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} + m^2 w_k = 0.$$

Il résulte de là que la théorie du n° **13** est applicable à l'équation (28). Cela posé, désignons par n le nombre entier et positif, tel que l'on ait

$$(29) \qquad |\lambda_n| \leqq a < \lambda_{n+1}.$$

La fonction Q_k considérée comme fonction de la variable complexe λ n'aura dans le domaine défini par l'inégalité

$$(30) \qquad |\lambda| < \lambda_{n+1},$$

pour toutes singularités, que des pôles simples tous compris dans la suite

$$(31) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n.$$

Pour simplifier le langage, nous nous exprimerons comme si la fonction Q_k devait avoir tous ces nombres pour pôles, en convenant en même temps de dire que le résidu correspondant à un terme de la suite (31) est nul si ce terme n'est pas en réalité un pôle de la fonc-

tion Q_k. Désignons par $\Pi_{k\alpha}$ le résidu relatif au pôle λ_α et posons

$$(32) \qquad Q_k = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\Pi_{k\alpha}}{\lambda - \lambda_\alpha} + G_k.$$

La fonction G_k sera une fonction de λ holomorphe à l'intérieur du cercle défini par l'inégalité (30) dans le plan de la variable complexe λ et elle représentera un potentiel de double couche vérifiant l'équation suivante :

$$(33) \qquad (G_k)_e - (G_k)_i = \lambda[(G_k)_e + (G_k)_i] + 2\Phi_k$$

en posant

$$(34) \qquad 2\Phi_k = 2(\psi_k)_s + \sum_{\alpha=1}^{n}[(\Pi_{k\alpha})_e + (\Pi_{k\alpha})_i].$$

D'après ce qui a été établi au n° **13** on aura

$$(35) \qquad (\Pi_{k\alpha})_e + (\Pi_{k\alpha})_i = 2\sum_{j=1}^{j\alpha} C_{\alpha j}^{(k)} U_{\alpha j}$$

avec

$$(36) \qquad C_{\alpha j}^{(k)} = \int_{(S)} (\psi_k)_s \left[\left(\frac{dU_{\alpha j}}{dN}\right)_i - \left(\frac{dU_{\alpha j}}{dN}\right)_e\right] ds$$

en convenant en outre de remplacer dans la formule (35), pour $\alpha = 1$, le symbole $U_{1,1}$ par l'unité.

Cela posé on s'assurera aisément, en s'appuyant sur les inégalités (24) et (26) du numéro précédent, qu'il existe un nombre positif B_1, ne dépendant ni des indices k, α et j ni de la fonction h_0, tel que l'on ait

$$(37) \qquad |C_{\alpha j}^{(k)}| < B_1 \frac{\Pi_0}{a^k}.$$

On conclura aisément de cette inégalité, en adjoignant à la formule (35) la relation suivante :

$$(\Pi_{k\alpha})_e - (\Pi_{k\alpha})_i = \lambda_k[(\Pi_{k\alpha})_e + (\Pi_{k\alpha})_i],$$

que la série

$$(38) \qquad \Pi_\alpha(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{k\alpha} \lambda^k$$

est absolument et uniformément convergente dans tout le plan, pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (14).

Montrons qu'il en est de même de la série suivante :

$$(39) \qquad G(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k \lambda^k$$

dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions de λ.

Il résulte des formules (34) et (35) et de la remarque faite plus haut au sujet du symbole U_{11} que nous pouvons considérer la fonction Φ_k comme définie dans toute l'étendue du plan au moyen de la formule suivante :

$$(40) \qquad \Phi_k = C_{11}^{(k)} + \sum_{j=2}^{j_k} C_{1j}^{(k)} U_{1j} + \sum_{\alpha=2}^{n} \sum_{j=1}^{j_\alpha} C_{\alpha j}^{(k)} U_{\alpha j} + \psi_k.$$

Il résulte immédiatement de cette remarque que la théorie du n° **13** est applicable à l'équation (33). Désignons par P_k le potentiel logarithmique ordinaire de double couche défini au moyen de l'équation suivante :

$$(41) \qquad (P_k)_e - (P_k)_i = 2\Phi_k$$

et considérons le potentiel de simple couche z_k vérifiant l'équation

$$\left(\frac{dz_k}{dN}\right)_i - \left(\frac{dz_k}{dN}\right)_e = \lambda\left[\left(\frac{dz_k}{dN}\right)_i + \left(\frac{dz_k}{dN}\right)_e\right] + 2\frac{dP_k}{dN},$$

la formule (3) nous donnera

$$(42) \qquad G_k = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)}\left[\frac{\lambda z_k + (P_k)_i}{\lambda + 1} + \frac{\lambda z_k + (P_k)_e}{\lambda - 1}\right]\frac{\cos\gamma}{r}\,ds.$$

D'ailleurs la fonction z_k de λ sera holomorphe pour l'ensemble des valeurs de λ vérifiant l'inégalité (30).

Par conséquent, si la série

$$z_k = \sum_{t=0}^{\infty} z_{kt} \lambda^t$$

représente le développement de z_k suivant les puissances de λ, elle aura λ_{n+1} pour rayon de convergence. J'ajoute qu'elle convergera uniformément dans tout le plan pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (30) parce que les fonctions harmoniques z_{kt} sont manifestement toutes régulières à l'infini.

On établira aisément, au moyen de l'inégalité de Schwarz, les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\\
&<\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial P_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\\
&<\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.
\end{aligned}$$

D'ailleurs, la formule (40) donne

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\\
&\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy-\sum_{j=2}^{j_k}(C_{1j}^{k})^2-\sum_{\alpha=2}^{n}\sum_{j=1}^{j_\alpha}(C_{\alpha j}^{k})^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité (26) donnera

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy<\left(B\frac{H_0}{a^k}\right)^2. \tag{43}$$

D'autre part, on conclura aisément des résultats déjà établis que l'on a

$$|P_k|<B_2\frac{H_0}{a^k}$$

en désignant par B_2 un nombre positif ne dépendant ni de l'indice k ni de la fonction h_0. Il résulte de cette inégalité :

1° Que la série

$$(44) \qquad P(\lambda) = \sum_{k=0} P_k \lambda^k$$

sera absolument et uniformément convergente dans tout le plan pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (14);

2° Qu'il existe un nombre positif B_3, analogue aux nombres B, B_1 et B_2, tel que l'on ait à la fois

$$(45) \qquad |z_{k0}| < B_3 \frac{H_0}{a^k} \quad \text{et} \quad |z_{k1}| < B_3 \frac{H_0}{a^k}.$$

En s'appuyant sur les inégalités (43) et (45), on déduira aisément de l'inégalité (42) du Chapitre précédent la conséquence suivante : il existe un nombre positif B_4, analogue aux nombres B, B_1, B_2 et B_3, tel que l'on ait

$$|z_{kj}| < B_4 \frac{H_0}{a^{k+j}}.$$

Cela prouve que la série

$$(46) \qquad z(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \lambda^k$$

sera absolument et uniformément convergente dans tout le plan, pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (14). Or la série (44) jouit aussi, comme nous venons de le voir, de la même propriété.

Il en résulte, à cause de la formule (42), que la série (39) jouira aussi de cette propriété parce que les fonctions G_k n'ont pas, comme semble l'indiquer la formule (42), les nombres -1 et $+1$ pour pôles. D'ailleurs, nous l'avons déjà établi, les séries (21) et (38) sont, comme les précédentes, absolument et uniformément convergentes dans tout le plan pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (14). Il résulte de tout cela, en tenant compte en outre des équations (18), (27) et (32), que l'expression suivante de v

$$(47) \qquad v = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\lambda \Pi_\alpha(\lambda)}{\lambda - \lambda_\alpha} + \lambda G(\lambda) + \varphi(\lambda)$$

sera valable dans tout l'intérieur du cercle (Σ) défini dans le plan du paramètre complexe λ par l'inégalité (14). On conclura immédiatement de la formule (47) qu'il existe une solution de l'équation (1) analytique par rapport au paramètre λ jouissant à l'intérieur du cercle (Σ) de toutes les propriétés spécifiées dans l'énoncé du théorème fondamental II de l'Introduction. Mais on peut donner au nombre a une valeur aussi voisine de R que l'on voudra; on peut donc, dans la conclusion que nous venons de formuler, remplacer le cercle (Σ) par le cercle que définit l'inégalité suivante :

$$|\lambda| < R.$$

Pour achever la démonstration du théorème fondamental II de l'Introduction il nous reste à établir que la solution de l'équation (1) analytique par rapport à λ est unique et à justifier ce qui a été dit au sujet des solutions non analytiques par rapport à ce paramètre. La démonstration de ces deux points se ramène, on le reconnaît sans peine, à celle de la proposition suivante : lorsqu'un potentiel de double couche V vérifie sur la ligne (S) l'équation suivante :

$$(48) \qquad (V)_e - (V)_i = \lambda'[(V)_e + (V)_i]$$

où λ' représente une constante et lorsque la valeur commune des deux membres de cette équation considérée comme fonction d'un point mobile sur (S) satisfait aux hypothèses générales faites dans ce travail au sujet de la fonction h_0, le nombre λ' doit être égal à l'un des termes de la suite

$$(49) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

et la fonction V doit s'exprimer au moyen des fonctions fondamentales correspondant à ce terme, soit λ_k, de la suite précédente, comme si cette fonction représentait le résidu relatif au pôle λ_k d'une solution analytique de l'équation (1).

Pour établir cette proposition faisons, dans l'équation (1),

$$2h_0 = (V)_e + (V)_i.$$

L'équation (1) admettra alors la solution

$$\varphi = \frac{V}{\lambda - \lambda'}. \tag{50}$$

D'ailleurs, la constante λ' ne peut être nulle, sans quoi on aurait identiquement $V = 0$. Par conséquent l'équation (50) définit la même fonction analytique de λ que la formule (48) pour la valeur considérée de h_0.

Il en résulte que V doit bien jouir des propriétés annoncées.

J'ajoute que les formules (4) et (5), on le prouvera avec un peu d'attention, restent exactes dans les conditions générales où nous nous sommes placés ici en ce qui concerne la fonction h_0.

Il resterait encore à compléter ce qui précède par la discussion détaillée des pôles -1 et $+1$ dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires et à développer les applications de cette discussion au problème de Dirichlet. On le fera aisément par la méthode que j'ai suivie dans l'étude des mêmes questions dans le cas de l'espace [1].

---

[1] *Sur les méthodes de la moyenne arithmétique de Neumann et de Robin dans le cas d'une frontière non connexe* (*Bulletin de l'Académie de Cracovie*, octobre 1902).

Sur les solutions satisfaisant à des conditions aux limites données de l'équation différentielle

$$\Delta u + \lambda A(x, y) u = f(x, y).$$

Par M. Max MASON.

Introduction.

Dans la théorie de l'élasticité et dans celle de l'électricité, l'équation des vibrations stationnaires

$$\Delta u + \lambda A(x, y) u = 0 \tag{1}$$

ne le cède en importance qu'à l'équation potentielle. Le paramètre λ de l'équation doit être déterminé de façon qu'il existe une solution $u(x, y)$ qui s'annule à la frontière d'une région donnée sans être identiquement nulle ([1]).

L'équation (1) est l'équation de Lagrange qui correspond au problème isopérimétrique. M. Weber ([2]) a prouvé (en supposant établi le principe de Dirichlet) l'existence d'une infinité de valeurs de λ pour lesquelles il y a une *fonction harmonique* solution du caractère demandé.

([1]) Voir *Ency. der math. Wiss.*, t. II, A 7_c (Sommerfeld).
([2]) *Math. Ann.*, t. I, 1869, p. 1.

Schwarz ([1]) fut le premier à démontrer rigoureusement l'existence d'une telle valeur de λ; M. Picard ([2]) montra l'existence d'une autre. Enfin, la démonstration pour une infinité de valeurs fut donnée par M. Poincaré ([3]). Dans ces trois cas, la méthode employée fut celle des approximations successives avec l'hypothèse que $A(x, y)$ ne change pas de signe dans le domaine considéré, et les propriétés de minimum des fonctions harmoniques autres que la première ne furent pas considérées.

L'objet de ce Mémoire est : 1° d'obtenir des théorèmes généraux d'existence pour les solutions de l'équation différentielle

$$\Delta u + \lambda A(x, y) u = f(x, y),$$

sous certaines conditions aux limites, par l'application de la méthode employée par M. Fredholm pour la solution de certaines équations fonctionnelles; 2° d'en déduire l'existence des fonctions harmoniques comme fonctions minima. Nous justifierons ainsi le principe de Dirichlet tel qu'il a été appliqué par M. Weber dans le problème isopérimétrique, de même que M. Hilbert ([4]) l'a justifié sous sa forme primitive. La démonstration de l'existence d'une infinité de fonctions harmoniques s'annulant sur la frontière et d'une infinité d'autres satisfaisant sur le contour à l'équation

$$u + \sum (u) \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

sera faite sans rien supposer sur le signe de $A(x, y)$. Dans la seconde Partie, nous nous occupons de l'existence des solutions doublement périodiques ([5]).

([1]) *Fenn. Acta*, t. XV, 1885. — *Ges. Abh.*, t. I, p. 241.

([2]) *C. R.*, t. CXVII, 1893, p. 502.

([3]) *Rend. Pal.*, t. VIII, 1894, p. 57. Dans cet article, $A = 1$. — *Voir* aussi Zaremba, *C. R.*, t. CXXXII, 1901, p. 1549; *Krak. Abh.*, t. XLI, 1901, p. 242. — Korn, *Abhandlungen zur Potentialtheorie*. Berlin, 1902.

([4]) *Festschrift : Ueber das Dirichlet'sche Princip* (*Abh. der k. Gött. Gelehrtengesellschaft*. Berlin, 1901).

([5]) J'ai considéré des questions analogues pour l'équation à une seule variable, dans *Math. Ann.*, t. LVIII, 1904, p. 528.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Sur la méthode de M. Fredholm.

M. Fredholm [1] a montré comment on peut déterminer une solution de l'équation fonctionnelle

$$(1)\qquad \varphi(\xi, \eta) + \lambda \int_a^b \int_a^b f(\xi, \eta, x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy = \psi(\xi, \eta),$$

où λ est un paramètre et où ψ, f sont des fonctions finies et intégrables pour les valeurs de leurs arguments comprises entre a et b. Cette méthode s'applique, avec une légère modification, au cas où f, sans rester fini, a la forme

$$f(\xi, \eta, x, y) = \mathrm{R} \log[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] + \mathrm{S},$$

où R et S sont des fonctions de x, y, ξ, η finies et intégrables.

Nous définirons *le déterminant* D *de* (1) par les équations [2]

$$\mathrm{D} = 1 + \sum_{h=2}^{\infty} d_h \lambda^h,$$

$$d_h = \frac{1}{h!} \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} 0 & f(x_1 y_1 x_2 y_2) & f(x_1 y_1 x_3 y_3) & \cdots & f(x_1 y_1 x_h y_h) \\ f(x_2 y_2 x_1 y_1) & 0 & f(x_2 y_2 x_3 y_3) & \cdots & f(x_2 y_2 x_h y_h) \\ f(x_3 y_3 x_1 y_1) & f(x_3 y_3 x_2 y_2) & 0 & \cdots & f(x_3 y_3 x_h y_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x_h y_h x_1 y_1) & f(x_h y_h x_2 y_2) & f(x_h y_h x_3 y_3) & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$
$$\times\, dx_1 \ldots dx_h dy_1 \ldots dy_h.$$

---

(1) *Acta Math.*, t. XXVII, 1903, p. 365.

(2) Pour plus de simplicité, nous écrirons dans les déterminants $f(x_1 y_1 x_2 y_2)$ au lieu de $f(x_1, y_1, x_2, y_2)$, etc.

Nous appellerons *mineur d'ordre n de* D la fonction suivante de λ et des paramètres ξ_i, η_i, σ_i, τ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_n \\ \sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_n \\ \tau_1\, \tau_2 \ldots \tau_n \end{pmatrix} = \sum_{h=0}^{\infty} \delta_h \lambda^{h+n},$$

$$\delta_h = \frac{1}{h!}\int_a^b \cdots \int_a^b$$

$$\begin{vmatrix} 0 & f(\xi_1\eta_1\sigma_2\tau_2) & \ldots & f(\xi_1\eta_1\sigma_n\tau_n) & f(\xi_1\eta_1 x_1 y_1) & f(\xi_1\eta_1 x_2 y_2) & \ldots & f(\xi_1\eta_1 x_h y_h) \\ f(\xi_2\eta_2\sigma_1\tau_1) & 0 & \ldots & f(\xi_2\eta_2\sigma_n\tau_n) & f(\xi_2\eta_2 x_1 y_1) & f(\xi_2\eta_2 x_2 y_2) & \ldots & f(\xi_2\eta_2 x_h y_h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(\xi_n\eta_n\sigma_1\tau_1) & f(\xi_n\eta_n\sigma_2\tau_2) & \ldots & 0 & f(\xi_n\eta_n x_1 y_1) & f(\xi_n\eta_n x_2 y_2) & \ldots & f(\xi_n\eta_n x_h y_h) \\ f(x_1 y_1\sigma_1\tau_1) & f(x_1 y_1\sigma_2\tau_2) & \ldots & f(x_1 y_1\sigma_n\tau_n) & 0 & f(x_1 y_1 x_2 y_2) & \ldots & f(x_1 y_1 x_h y_h) \\ f(x_2 y_2\sigma_1\tau_1) & f(x_2 y_2\sigma_2\tau_2) & \ldots & f(x_2 y_2\sigma_n\tau_n) & f(x_2 y_2 x_1 y_1) & 0 & \ldots & f(x_2 y_2 x_h y_h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_h y_h\sigma_1\tau_1) & f(x_h y_h\sigma_2\tau_2) & \ldots & f(x_h y_h\sigma_n\tau_n) & f(x_h y_h x_1 y_1) & f(x_h y_h x_2 y_2) & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\times\, dx_1 \ldots dx_h dy_1 \ldots dy_h.$$

Dans les formules de M. Fredholm la diagonale principale n'était pas formée par des zéros, mais par des quantités de la forme

$$f(\xi_i\eta_i\sigma_i\tau_i), \quad f(x_i y_i x_i y_i).$$

Ce changement a été proposé par M. Hilbert qui a montré qu'il laissait intactes celles des formules de M. Fredholm qui ne contiennent que D et ses mineurs *du premier ordre* et que les séries précédemment définies restent convergentes pour toute valeur de λ, même quand f a une singularité logarithmique [1]. Nous aurons l'occasion de nous servir des résultats qui concernent les mineurs d'ordre n; nous indiquerons donc brièvement les changements causés par cette modification dans le cas général. En suivant les méthodes de M. Fredholm, on obtient les identités suivantes :

---

[1] Conférences de M. Hilbert à Göttingen, hiver 1901-1902. *Voir* aussi Kellogg, *Dissertation*, Göttingen, 1902 et Andrae, *Dissertation*, Göttingen, 1903, où l'on étend au cas où l'équation fonctionnelle contient n variables la démonstration faite par M. Hilbert pour une seule variable.

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \ldots \tau_n \end{pmatrix} + \lambda \int_a^b \int_a^b f(\xi_1, \eta_1, u, v)\, \mathfrak{D}\begin{pmatrix} u\ \xi_2 \ldots \xi_n \\ v\ \eta_2 \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n \end{pmatrix} du\, dv \\
&\quad + \lambda^2\, \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_2 \ldots \eta_n \\ \sigma_2 \ldots \sigma_n \\ \tau_2 \ldots \tau_n \end{pmatrix} \int_a^b \int_a^b f(u, v, \sigma_1, \tau_1)\, f(\sigma_1, \tau_1, u, v)\, du\, dv \\
&= -\lambda \sum_{\nu=2}^{n} f(\xi_1, \eta_1, \sigma_\nu, \tau_\nu)\, \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_{\nu-1}\ \xi_\nu\ \ \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n \\ \eta_2 \ldots \eta_{\nu-1}\ \eta_\nu\ \ \eta_{\nu+1} \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \ldots \sigma_{\nu-2}\ \sigma_{\nu-1}\ \sigma_{\nu+1} \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \ldots \tau_{\nu-2}\ \tau_{\nu-1}\ \tau_{\nu+1} \ldots \tau_n \end{pmatrix} \\
&\quad - \lambda^2 \sum_{\nu=2}^{n} f(\xi_1, \eta_1, \sigma_\nu, \tau_\nu)\, f(\xi_\nu, \eta_\nu, \sigma_1, \tau_1)\, \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_{\nu-1}\ \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n \\ \eta_2 \ldots \eta_{\nu-1}\ \eta_{\nu+1} \ldots \eta_n \\ \sigma_2 \ldots \sigma_{\nu-1}\ \sigma_{\nu+1} \ldots \sigma_n \\ \tau_2 \ldots \tau_{\nu-1}\ \tau_{\nu+1} \ldots \tau_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \ldots \tau_n \end{pmatrix} + \lambda \int_a^b \int_a^b f(u, v, \sigma_1, \tau_1)\, \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_n \\ u\ \ \sigma_2 \ldots \sigma_n \\ v\ \ \tau_2 \ldots \tau_n \end{pmatrix} du\, dv \\
&\quad + \lambda^2\, \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_2 \ldots \eta_n \\ \sigma_2 \ldots \sigma_n \\ \tau_2 \ldots \tau_n \end{pmatrix} \int_a^b \int_a^b f(\xi_1, \eta_1, u, v)\, f(u, v, \xi_1, \eta_1)\, du\, dv \\
&= -\lambda \sum_{\nu=2}^{n} f(\xi_\nu, \eta_\nu, \sigma_1, \tau_1)\, \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_{\nu-2}\ \xi_{\nu-1}\ \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n \\ \eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_{\nu-2}\ \eta_{\nu-1}\ \eta_{\nu+1} \ldots \eta_n \\ \sigma_2\ \sigma_3 \ldots \sigma_{\nu-1}\ \sigma_\nu\ \ \sigma_{\nu+1} \ldots \sigma_n \\ \tau_2\ \tau_3 \ldots \tau_{\nu-1}\ \tau_\nu\ \ \tau_{\nu+1} \ldots \tau_n \end{pmatrix} \\
&\quad - \lambda^2 \sum_{\nu=2}^{n} f(\xi_\nu, \eta_\nu, \sigma_1, \tau_1)\, f(\xi_1, \eta_1, \sigma_\nu, \tau_\nu)\, \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_2\ \xi_3 \ldots \xi_{\nu-1}\ \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n \\ \eta_2\ \eta_3 \ldots \eta_{\nu-1}\ \eta_{\nu+1} \ldots \eta_n \\ \sigma_2\ \sigma_3 \ldots \sigma_{\nu-1}\ \sigma_{\nu+1} \ldots \sigma_n \\ \tau_2\ \tau_3 \ldots \tau_{\nu-1}\ \tau_{\nu+1} \ldots \tau_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations diffèrent de celles de M. Fredholm par l'addition des termes en λ^2, lesquels contiennent tous en facteurs des mineurs de D d'ordre $n-2$. Pour $n=1$, ces équations deviennent

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \sigma \\ \tau \end{pmatrix} + \lambda \int_a^b \int_a^b f(\xi, \eta, u, v)\, \mathfrak{D}\begin{pmatrix} u \\ v \\ \sigma \\ \tau \end{pmatrix} du\, dv \\ & = -\lambda^2\, \mathfrak{D} \int_a^b \int_a^b f(u, v, \sigma, \tau)\, f(\sigma, \tau, u, v)\, du\, dv, \end{aligned} \right.$$

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \sigma \\ \tau \end{pmatrix} + \lambda \int_a^b \int_a^b f(u, v, \sigma, \tau)\, \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ u \\ v \end{pmatrix} du\, dv \\ & = -\lambda^2\, \mathfrak{D} \int_a^b \int_a^b f(\xi, \eta, u, v)\, f(u, v, \xi, \eta)\, du\, dv. \end{aligned} \right.$$

Considérons d'abord le cas où λ n'est pas une racine de la fonction transcendante D. En introduisant le symbole fonctionnel S qui donne à l'équation (1) la forme

$$S_f\, \varphi(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta),$$

nous aurons

$$S_g\, \psi(\xi, \eta) = S_g S_f\, \varphi(\xi, \eta) = S_F\, \varphi(\xi, \eta),$$

où

$$F = g + \lambda f + \lambda \int_a^b \int_a^b g(\xi, \eta, s, t)\, f(s, t, x, y)\, ds\, dt,$$

pourvu que la fonction $g(\xi, \eta, x, y)$ satisfasse aux mêmes conditions de continuité que f. En particulier, on voit d'après (3') que F est identiquement nul lorsqu'on remplace g par

$$g_1(\xi, \eta, x, y) = -\frac{1}{\mathfrak{D}}\, \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ x \\ y \end{pmatrix} - \lambda f(\xi, \eta, x, y)$$

et, par suite,

$$S_{g_1} S_f\, \varphi(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta).$$

Donc, s'il y a une solution de (1), elle est unique et donnée par la formule

$$\varphi = S_{g_1}\psi.$$

D'ailleurs, d'après (2'), cette expression satisfait bien à l'équation (1). On a donc le théorème suivant :

Si le paramètre λ *n'est pas racine de* D, *l'équation*

$$\varphi(\xi, \eta) + \lambda \int_a^b \int_a^b f(\xi, \eta, x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = \psi(\xi, \eta)$$

admet une solution unique

$$\varphi(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta) - \lambda \int_a^b \int_a^b \left\{ \frac{1}{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ x \\ y \end{Bmatrix} - \lambda f(\xi, \eta, x, y) \right\} \psi(x, y)\,dx\,dy.$$

Considérons maintenant le cas où D et ses mineurs d'ordre inférieur à n sont nuls pour la valeur de λ considérée quelles que soient les valeurs des variables ξ, η, σ, τ dont ils dépendent, mais où le mineur d'ordre n n'est pas identiquement nul [1]. Alors (2) et (3) deviennent

$$\mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n \\ \eta_1\,\eta_2\ldots\eta_n \\ \sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n \\ \tau_1\,\tau_2\ldots\tau_n \end{Bmatrix} + \lambda \int_a^b \int_a^b f(\xi, \eta, u, v)\;\mathfrak{D}\begin{Bmatrix} u\;\xi_2\ldots\xi_n \\ v\;\eta_2\ldots\eta_n \\ \sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n \\ \tau_1\,\tau_2\ldots\tau_n \end{Bmatrix} du\,dv = 0,$$

$$\mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n \\ \eta_1\,\eta_2\ldots\eta_n \\ \sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n \\ \tau_1\,\tau_2\ldots\tau_n \end{Bmatrix} + \lambda \int_a^b \int_a^b f(u, v, \sigma_1, \tau_1)\,\mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n \\ \eta_1\,\eta_2\ldots\eta_n \\ u\;\sigma_2\ldots\sigma_n \\ v\;\tau_2\ldots\tau_n \end{Bmatrix} du\,dv = 0.$$

---

(1) Pour chaque valeur de λ il existe un nombre fini n, tel que le mineur de D d'ordre n n'est pas nul. *Voir* Fredholm, *loc. cit.*, p. 371; sa démonstration s'applique ici sans modifications.

Ces identités sont celles mêmes de M. Fredholm et sa méthode appliquée sans modification conduit aux théorèmes suivants :

Il ne peut exister de solution non identiquement nulle de l'équation homogène

$$\varphi(\xi, \eta) + \lambda \int_a^b \int_a^b f(\xi, \eta, x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy = 0$$

que si λ *est racine de* D. *Si* n *est l'ordre du premier mineur de* D *qui ne s'annule pas pour cette valeur de* λ, *il y a exactement* n *solutions linéairement indépendantes, lesquelles sont de la forme* (¹)

$$\Phi_\nu(\xi, \eta) = \frac{1}{\mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_n \\ \sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_n \\ \tau_1\, \tau_2 \ldots \tau_n \end{Bmatrix}} \mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi_1 \ldots \xi_{\nu-1}\, \xi\, \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_{\nu-1}\, \eta\, \eta_{\nu+1} \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \ldots \sigma_{\nu-1}\, \sigma_\nu\, \sigma_{\nu+1} \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \ldots \tau_{\nu-1}\, \tau_\nu\, \tau_{\nu+1} \ldots \tau_n \end{Bmatrix} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Pour cette même valeur de λ, *il ne peut exister de solutions de l'équation à second membre*

$$\varphi(\xi, \eta) + \lambda \int_a^b \int_a^b f(\xi, \eta, x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy = \psi(\xi, \eta)$$

que si la fonction $\psi(\xi, \eta)$ *satisfait aux* n *équations fonctionnelles*

$$\int_a^b \int_a^b \psi(x, y)\, \Psi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

(¹) L'ensemble des fonctions Φ_ν est indépendant du choix des paramètres. L'introduction de nouvelles valeurs pour ces paramètres ne fait que changer chaque Φ en une combinaison linéaire des Φ_ν. *Voir* Fredholm, *loc. cit.*, p. 375.

où l'on a (¹)

$$\Psi_\nu(x, y) = \frac{1}{\mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \ldots \tau_n \end{Bmatrix}} \mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi_1 \ldots \xi_{\nu-1}\, \xi_\nu\, \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_{\nu-1}\, \eta_\nu\, \eta_{\nu+1} \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \ldots \sigma_{\nu-1}\, x\, \sigma_{\nu+1} \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \ldots \tau_{\nu-1}\, y\, \tau_{\nu+1} \ldots \tau_n \end{Bmatrix}.$$

Et alors, la solution la plus générale est

$$\varphi(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta) - \lambda \int_a^b \int_a^b \left\{ \frac{1}{\mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \ldots \tau_n \end{Bmatrix}} \mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi\, \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta\, \eta_1 \ldots \eta_n \\ x\, \sigma_1 \ldots \sigma_n \\ y\, \tau_1 \ldots \tau_n \end{Bmatrix} - \lambda f(\xi, \eta, x, y) \right\}$$

$$\times\, \psi(x, y)\, dx\, dy + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \Phi_\nu(\xi, \eta),$$

où les c_ν sont des constantes arbitraires.

Dans la démonstration de la convergence des séries qui définissent D, on prouve (²) que l'on a, quel que soit l'entier positif h,

$$|d_h| < c' \frac{c^h (b-a)^{2h+c''}}{h^{\frac{h}{2}}}, \qquad c'' > 0,$$

où c, c' et c'' sont des constantes indépendantes de h et ne contenant que des puissances positives de $b - a$. On peut donc prendre $(b - a)$ assez petit pour qu'une valeur de λ quelconque, mais fixée à l'avance, ne soit pas racine de D. Nous pouvons donc énoncer encore cette proposition :

Étant donnée une valeur quelconque de λ, on peut prendre

(¹) La note précédente s'applique aux Ψ_ν.

(²) ANDRAE, *loc cit.*, p. 101.

$(b-a)$ *assez petit pour que l'équation*

$$\varphi(\xi, \eta) + \lambda \int_a^b \int_a^b f(\xi, \eta, x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy = \psi(\xi, \eta)$$

ait une solution, et une seule.

II. — Théorèmes généraux d'existence pour le problème aux limites.

Nous établirons dans ce paragraphe l'existence d'une fonction $u(x, y)$ qui est continue dans une région Ω ainsi que ses dérivées premières, qui satisfait à l'équation différentielle

$$\Delta u + \lambda A(x, y) u = f(x, y) \tag{1}$$

et prend des valeurs données $\sigma(s)$ sur le contour S de Ω [1]. On admet que les fonctions A et f soient bornées et intégrables dans Ω et que $\sigma(s)$ soit une fonction continue de s, longueur de l'arc de S.

D'après le théorème de Green, on a

$$\iint_{(\Omega)} (v \Delta u - u \Delta v)\, dx\, dy = -\int_{(S)} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \tag{2}$$

n étant la normale intérieure à S. Prenons pour u une solution [2] de (1), solution dont nous postulerons provisoirement l'existence. Et prenons pour v la fonction de Green $\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)$, solution de l'équation potentielle $\Delta v = 0$ dans la région Ω, qui admet la même singularité que $\log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ et s'annule sur S. L'existence d'une telle fonction $\mathcal{G}$ a été prouvée par plusieurs méthodes. Appliquons la formule (2) à la région obtenue en excluant de Ω une aire circulaire

---

[1] On suppose la région Ω limitée et à connexion simple, son contour S étant formé d'un nombre fini d'arcs analytiques. On sait qu'on peut appliquer à une telle région les résultats de la théorie du potentiel.

[2] Nous emploierons le mot *solution* pour désigner une fonction qui satisfait à l'équation (1) en tout point de Ω. Cette définition implique la continuité des dérivées premières.

de rayon r, de centre (ξ, η). En passant à la limite pour $r = 0$, on obtient par une méthode bien connue

$$(3) \quad u(\xi, \eta) = \frac{-1}{2\pi} \int_{(S)} \sigma \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \iint_{(\Omega)} \mathcal{G}(f - \lambda A u)\, dx\, dy,$$

en remplaçant les valeurs de u sur S par σ.

Inversement la théorie du potentiel montre que toute solution u de l'équation (3) satisfait à l'égalité

$$\Delta u = f - \lambda A u$$

[c'est-à-dire à l'équation (1)] et admet les valeurs aux limites $\sigma(s)$ [1].

L'intégration de (1) sous les conditions aux limites données est donc ramenée à la résolution de l'équation fonctionnelle

$$(4) \quad u(\xi, \eta) + \lambda \int_a^b \int_a^b \frac{A(x, y)}{2\pi} \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)\, u(x, y)\, dx, y = F(\xi, \eta),$$

où $F(\xi, \eta)$ désigne la fonction connue

$$\frac{-1}{2\pi} \int_{(S)} \sigma \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \iint_{(\Omega)} f(x, y)\, \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)\, dx\, dy,$$

et où nous avons étendu l'aire d'intégration à un carré de côté $(b - a)$ entourant Ω, $\mathcal{G}$ étant considérée comme nulle en dehors de Ω.

Or, (4) est une équation fonctionnelle de la forme considérée § I. Pour appliquer les résultats de M. Fredholm, il suffit de savoir à quelles conditions $F(\xi, \eta)$ est identiquement nul. Comme la représentation au moyen de la fonction de Green est unique, cela ne peut arriver que si l'on a

$$\sigma(s) \equiv 0, \qquad f(x, y) \equiv 0.$$

Les résultats du paragraphe précédent nous conduisent donc aux théorèmes suivants :

I. *Si $f(x, y)$ et $\sigma(s)$ ne sont pas à la fois identiquement nuls,*

---

(1) *Voir* HARNACK, *Logarithmisches Potential*. Leipzig, 1887.

il existe, pour toute valeur du paramètre λ *autre que les racines de la fonction entière* D, *une solution et une seule de l'équation*

$$\Delta u + \lambda A(x, y)\, u = f(x, y)$$

qui prenne les valeurs aux limites $\sigma(s)$. *Cette solution est donnée par la formule*

$$u(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) - \lambda \iint_{(\Omega)} \left[\frac{1}{\mathfrak{D}} \mathfrak{D} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ x \\ y \end{Bmatrix} - \lambda \frac{A(x, y)}{2\pi} \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) \right] F(x, y)\, dx\, dy.$$

II. *Il ne peut y avoir de solution nulle sur* S (*sans être identiquement nulle*) *de l'équation*

$$\Delta u + \lambda A(x, y)\, u = 0$$

que si le paramètre λ *est une racine de* D. *Si* n *est l'ordre du premier mineur* D *qui ne s'annule pas pour la valeur considérée de* λ, *il existe exactement* n *solutions linéairement indépendantes s'annulant sur le contour* S. *Ces solutions ont la même forme que les fonctions* $\Phi_\nu(x, y)$ *données dans le paragraphe précédent.*

Pour la même valeur de λ, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution de

$$\Delta u + \lambda A(x, y)\, u = f(x, y)$$

qui prenne des valeurs aux limites $\sigma(s)$ est que $f(x, y)$ et $\sigma(s)$ vérifient les conditions

$$\iint_{(\Omega)} F(x, y)\, \Psi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

où Ψ_ν a la forme donnée dans le paragraphe précédent. D'ailleurs, la fonction $f(\xi, \eta, x, y)$ de ce même paragraphe a ici la forme

$$f(\xi, \eta, x, y) = \frac{1}{2\pi} A(x, y)\, \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta).$$

Dans les expressions de D et de ses mineurs, A peut être supprimé du déterminant et mis en facteur. En écrivant δ_h sous la forme

$$\delta_h = \frac{1}{h!}\int_a^b \cdots \int_a^b \Delta(f)\, dx_1 \ldots dy_h,$$

nous aurons

$$\delta_h = \frac{A(\sigma_1, \tau_1)\ldots A(\sigma_n, \tau_n)}{h!\,(2\pi)^h}\int_a^b \cdots \int_a^b A(x_1, y_1)\ldots A(x_h, y_h)\,\Delta(\mathcal{G})\, dx_1 \ldots dy_h.$$

L'identité

$$\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) = \mathcal{G}(\xi, \eta, x, y)$$

montre que le déterminant $\Delta(\mathcal{G})$ reste invariant si l'on permute les paramètres ξ_i, η_i avec σ_i, τ_i, respectivement; en effet, on aurait seulement changé la position relative des lignes et des colonnes. Dès lors, revenant aux définitions de Φ_ν et de Ψ_ν, on voit facilement qu'il suffit de choisir, pour les valeurs des deux paramètres ξ_ν, η_ν de Ψ_ν, les paramètres σ_ν, τ_ν de Φ_ν, respectivement, pour avoir la relation

$$\frac{\Psi_\nu(x, y)}{A(x, y)} = \frac{\Phi_\nu(x, y)}{A(\sigma_\nu, \tau_\nu)}$$

ou

$$\Psi_\nu(x, y) = A(x, y)\,\Phi_\nu(x, y) \times \text{const.}$$

Les conditions trouvées précédemment pour F peuvent alors s'écrire

$$\iint_{(\Omega)} F(x, y)\, A(x, y)\, \Phi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

ou, puisque $\Delta\Phi_\nu + \lambda A \Phi_\nu = 0$:

$$\iint_{(\Omega)} F(x, y)\, \Delta\Phi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Appliquons le théorème de Green; puisque les Φ_ν s'annulent sur S,

on aura

$$\iint_{(\Omega)} [\mathrm{F}(x,y)\,\Delta\Phi_\nu(x,y) - \Phi_\nu(x,y)\,\Delta\mathrm{F}(x,y)]\,dx\,dy = -\int_{(S)} \mathrm{F}\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial n}\,ds.$$

Mais la fonction

$$\mathrm{F}(\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{(\Omega)} f(x,y)\,\mathcal{G}(x,y,\xi,\eta)\,dx\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \sigma\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n}\,ds$$

satisfait dans Ω à l'équation

$$\Delta\mathrm{F} = f,$$

et elle prend les valeurs σ sur S. Les conditions deviennent alors

$$\iint_{(\Omega)} f(x,y)\,\Phi_\nu(x,y)\,dx\,dy - \int_{(S)} \sigma\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial n}\,ds = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

On a donc le théorème :

III. *Si λ a une valeur pour laquelle* D *et ses mineurs s'annulent jusqu'à l'ordre n exclusivement, il ne peut y avoir de solutions de*

$$\Delta u + \lambda\mathrm{A}u = f$$

prenant les valeurs σ sur S, *que si f et σ satisfont aux conditions*

$$\iint_{(\Omega)} f\Phi_\nu\,dx\,dy - \int_{(S)} \sigma\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial n}\,ds = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Dans ces égalités, les Φ_ν sont les n solutions linéairement indépendantes et nulles sur S de l'équation différentielle rendue homogène.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, les solutions ont la

forme

$$u(\xi,\eta) = \mathrm{F}(\xi,\eta) - \lambda \iint_{(\Omega)} \left\{ \frac{1}{\mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \ldots \tau_n \end{Bmatrix}} \mathfrak{D}\begin{Bmatrix} \xi\,\xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta\,\eta_1 \ldots \eta_n \\ x\,\sigma_1 \ldots \sigma_n \\ y\,\tau_1 \ldots \tau_n \end{Bmatrix} - \lambda \frac{\mathrm{A}(x,y)}{2\pi} \mathcal{G}(x,y,\xi,\eta) \right\}$$

$$\times \mathrm{F}(x,y)\,dx\,dy + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \Phi_\nu(\xi,\eta),$$

où les c_ν sont des constantes arbitraires.

Enfin, on transforme immédiatement le dernier énoncé du paragraphe précédent :

IV. *Pour une valeur donnée quelconque de λ, on peut prendre la région Ω assez petite pour qu'il existe dans Ω une solution et une seule de*

$$\Delta u + \lambda \mathrm{A}\, u = f$$

prenant les valeurs données σ sur S. Cette solution a la forme donnée dans le théorème I.

III. — Existence de la première fonction harmonique.

Nous avons montré qu'il existe une fonction harmonique, c'est-à-dire une solution de

$$(1) \qquad \Delta u + \lambda \mathrm{A}(x,y)\, u = 0,$$

nulle sur le contour S d'un domaine Ω sans être identiquement nulle dans Ω, pour les seules valeurs $\lambda = \lambda_k$ racines d'une certaine fonction transcendante entière D. Nous allons prouver maintenant qu'il y a une infinité de racines de D et que les fonctions harmoniques correspondantes sont les solutions de certains problèmes de calcul des variations.

Considérons le problème suivant : *Rendre minimum l'intégrale*

$$J(u) = \iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy,$$

u désignant une fonction qui s'annule sur le contour S *de* Ω, *admet des dérivées secondes en tout point de* Ω *et satisfait à l'équation*

$$|K(u)| = 1$$

où

$$K(u) = \iint_{(\Omega)} A u^2\, dx\, dy.$$

L'existence d'une solution de ce problème n'est pas évidente, mais il y a certainement une limite inférieure finie λ_0 pour les valeurs de J sous les conditions imposées. Nous allons démontrer le théorème suivant :

La limite inférieure λ_0 *ou la valeur symétrique* $-\lambda_0$ *est une racine de* D *et la fonction harmonique de* (1) *correspondante est une solution du problème de minimum.*

D'après la définition de λ_0, il existe une série infinie de fonctions satisfaisant aux conditions du problème

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots,$$

telles que

$$(2) \qquad \lim_{h=\infty} J(U_h) = \lambda_0.$$

De plus, ces fonctions peuvent être choisies de façon que l'on ait

$$(2)' \qquad K(U_h) = \pm 1,$$

où le signe reste le même quel que soit h.

Définissons une suite de fonctions f_h par les expressions

$$(3) \qquad f_h = \Delta U \pm \lambda_0 A U_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

le signe $\pm$ restant le même que dans (2)'.

En multipliant (3) par U_h et intégrant dans Ω

$$\iint_{(\Omega)} U_h \Delta U_h \, dx\, dy + \lambda_0 = \iint_{(\Omega)} f_h U_h \, dx\, dy.$$

Appliquons la formule de Green; puisque les U_h s'annulent sur le contour S, on aura

$$\lambda_0 - J(U_h) = \iint_{(\Omega)} f_h U_h \, dx\, dy.$$

Et d'après (2)

$$(3)' \qquad \lim_{h=\infty} \iint_{(\Omega)} f_h U_h \, dx\, dy = 0.$$

Soit maintenant

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots,$$

une série indéfinie de fonctions continues dans Ω ainsi que leurs dérivées premières et secondes et nulles sur S. Écrivons pour abréger

$$(4) \qquad \Delta V_h \pm \lambda_0 A V_h = g_h,$$

en choisissant comme précédemment le signe $\pm$.

Alors, l'équation

$$(5) \qquad \lim_{h=\infty} \iint_{(\Omega)} U_h g_h \, dx\, dy = 0$$

sera vérifiée par toute série analogue de fonctions V_h, *pourvu que l'on ait, quel que soit* h,

$$(6) \qquad \left| \iint_{(\Omega)} V_h g_h \, dx\, dy \right| < B$$

où B est un nombre fixe indépendant de h.

En effet, dans le cas contraire, on pourrait choisir parmi les couples U_h, V_h une série infinie de couples U'_h, V'_h pour lesquels

on ait, quel que soit h,

$$(5)' \qquad \iint_{(\Omega)} U'_h g'_h \, dx\, dy \geqq \rho \qquad \text{ou} \qquad \leqq \rho,$$

p étant un nombre indépendant de h, positif dans le premier cas, négatif dans le second et g'_h étant la fonction déterminée par V'_h dans (4).

Considérons alors les fonctions

$$v_h = U'_h + c V'_h$$

où c est une constante. Elles satisfont à l'équation

$$\Delta v_h \pm \lambda_0 A v_h = f'_h + c\, g'_h$$

et s'annulent sur S. Multiplions cette équation par $v_h = U'_h + c V'_h$ et intégrons dans Ω; nous aurons, au moyen de la formule de Green,

$$\pm \lambda_0 K(v_h) - J(v_h) = \iint_{(\Omega)} [U'_h f'_h + c(U'_h g'_h + V'_h f'_h) + c^2 V'_h g'_h] \, dx\, dy.$$

Mais, puisque U'_h et V'_h s'annulent sur S,

$$\iint_{(\Omega)} (U'_h \Delta V'_h - V'_h \Delta U'_h) \, dx\, dy = \iint_{\Omega} (U'_h g'_h - V'_h f'_h) \, dx\, dy = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} &\pm \lambda_0 K(v_h) - J(v_h) \\ &\quad = \iint_{(\Omega)} U'_h f'_h \, dx\, dy + 2c \iint_{(\Omega)} U'_h g'_h \, dx\, dy + c^2 \iint_{\Omega} V'_h g'_h \, dx\, dy. \end{aligned}$$

Choisissons c de façon que ρc soit positif et assez petit pour que l'on ait

$$2c\rho > c^2 B, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad |c| < \frac{2|\rho|}{B}.$$

En posant $\delta = 2\rho c - c^2 B$, nous déduirons de (6) et (5')

$$\pm \lambda_0 K(v_h) - J(v_h) \geqq \iint_{(\Omega)} U'_h f'_h dx\, dy + \delta.$$

D'ailleurs δ est une quantité positive indépendante de h; par suite, d'après (3)' nous pourrons prendre h assez grand ($h = H$), pour que

$$\pm \lambda_0 K(v_H) - J(v_H) > 0,$$

et alors

$$\lambda_0 |K(v_H)| - J(v_H) > 0. \tag{7}$$

Posons

$$\frac{v_H}{\sqrt{|K(v_H)|}} = u;$$

nous aurons $|K(u)| = 1$. Dès lors u satisfait à toutes les conditions du problème de calcul des variations et, en divisant (7) par $|K(v_H)|$, nous aurons

$$\lambda_0 - J(u) > 0,$$

ce qui est incompatible avec la supposition que λ_0 soit la limite inférieure de l'intégrale J sous les conditions du problème. En conséquence, l'hypothèse (5)' est fausse et l'équation (5) doit avoir lieu sous la condition (6).

Pour prouver maintenant le théorème lui-même, supposons, au contraire, qu'aucun des deux nombres $\pm \lambda_0$ ne soit racine de D. Alors, d'après le théorème I du paragraphe II, il existe une solution V_h de chacune des équations

$$\Delta V_h \pm \lambda_0 A V_h = A U_h \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

laquelle s'annule sur S et prend la forme

$$V_h(x, y) = \iint \Gamma(\xi, \eta, x, y) A(\xi, \eta) U_h(\xi, \eta) d\xi\, a\eta$$

où [1]

$$\Gamma(\xi, \eta, x, y)$$

$$= \frac{\pm\lambda_0}{2\pi}\iint\left[\frac{1}{\mathfrak{D}}\mathfrak{D}\begin{pmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{pmatrix} \pm \frac{\lambda_0}{2\pi}A(u, v)\mathcal{G}(u, v, x, y)\right]G(\xi, \eta, u, v)\,du\,dv$$

$$- \frac{1}{2\pi}\mathcal{G}(\xi, \eta, x, y).$$

Il nous faut montrer maintenant que les fonctions V_h satisfont à la condition (6). On a

$$\iint V_h g_h dx\,dy$$

$$= \iiiint A(\xi, \eta)U_h(\xi, \eta)A(x, y)U_h(x, y)\Gamma(\xi, \eta, x, y)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta.$$

Or on déduit de l'inégalité de Schwarz [2]

$$\left(\iint V_h g_h dx\,dy\right)^2 \leqq \iiiint \Gamma^2 dx\,dy\,d\xi\,d\eta \times \left(\iint A^2 U_h^2 dx\,dy\right)^2.$$

Les fonctions V_h vérifieront donc (6) pourvu que l'expression

$$\iint U_h^2 dx\,dy$$

soit bornée.

Or, il a été démontré [3] que toute fonction u satisfaisant à l'équation

$$\iint u\,dx\,dy = 0$$

---

(1) L'intégration est étendue à Ω dans cette équation et dans les suivantes.

(2) $\left(\iint \varphi\psi\,dx\,dy\right)^2 \leqq \iint \varphi^2 dx\,dy \iint \psi^2 dx\,dy$. (*Ges. Abh.*, t. I, p. 251.)

(3) Poincaré, *loc. cit.*, p. 70. *Voir* aussi Korn, *Abhandlung zur Potentialtheorie* (*Abh.* IV, 1902, p. 12; Berlin).

vérifie l'inégalité

$$\int\int u^2\,dx\,dy < k\,\mathrm{J}(u)$$

où k est une constante finie dépendant seulement du domaine Ω. D'autre part, on a, si L est l'aire de Ω,

$$\int\int\left(\mathrm{U}_h - \frac{1}{\mathrm{L}}\int\int \mathrm{U}_h\,dx\,dy\right)dx\,dy = 0;$$

par suite, en prenant $u = \mathrm{U}_h - \frac{1}{\mathrm{L}}\int\int \mathrm{U}_h\,dx\,dy$,

$$\int\int \mathrm{U}_h^2\,dx\,dy - \frac{1}{\mathrm{L}}\left(\int\int \mathrm{U}_h\,dx\,dy\right)^2 < k\,\mathrm{J}(\mathrm{U}_h).$$

De la condition $\lim \mathrm{J}(\mathrm{U}_h) = \lambda_0$, il résulte que les fonctions U_h satisferont à (6) pourvu que les quantités

$$\left|\int\int \mathrm{U}_h\,dx\,dy\right|$$

restent inférieures à une limite finie quel que soit h.

Mais puisque U_h s'annule sur le contour

$$\int\int \mathrm{U}_h\,dx\,dy = -\int\int x\,\frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial x}\,dx\,dy,$$

et en désignant par X le maximum de $|x|$ dans Ω, on aura

$$\left|\int\int \mathrm{U}_h\,dx\,dy\right| < \mathrm{X}\int\int\left|\frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial x}\right|dx\,dy < \mathrm{X}\int\int\left[1 + \left(\frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dy.$$

D'où

$$\left|\int\int \mathrm{U}_h\,dx\,dy\right| < \mathrm{XL} + \mathrm{X}\,\mathrm{J}(\mathrm{U}_h)$$

et la fonction V_h vérifie (6).

Mais si la condition (6) est satisfaite, l'équation (5) doit être vérifiée et l'on a

$$\lim_{h=\infty}\int\int_{(\Omega)} \mathrm{U}_h\,\mathrm{A}\mathrm{U}_h\,dx\,dy = \lim_{h=\infty} \mathrm{K}(\mathrm{U}_h) = 0.$$

Or ceci est impossible, puisque l'on a $|K(U_h)| = 1$ quel que soit 1. Ainsi l'hypothèse faite sur λ_0 est inexacte et l'un des deux nombres $\pm\lambda_0$ est racine de D.

Il résulte du théorème II, paragraphe II, qu'il existe une fonction harmonique u_0 nulle sur S et solution de l'équation différentielle

$$\Delta u_0 \pm \lambda_0 A u_0 = 0.$$

Multiplions cette équation par u_0; en intégrant dans Ω au moyen de la formule de Green, on aura

$$\pm\lambda_0 K(u_0) = J(u_0),$$

ou, puisque $J(u_0) > 0$,

$$\lambda_0 |K(u_0)| = J(u_0).$$

Déterminons le facteur constant et arbitraire qui figure dans u_0 de façon que $|K(u_0)| = 1$.

Alors u_0 satisfera à toutes les conditions du problème de minimum et ce sera une solution de ce problème puisque

$$\lambda_0 = J(u_0).$$

Enfin $\pm\lambda_0$ est en valeur absolue la plus petite racine de D. Car s'il existait une racine λ' telle que $|\lambda'| < \lambda_0$, la fonction harmonique correspondante satisferait (avec une détermination convenable de son facteur constant) aux conditions du problème de minimum et donnerait à $J(u)$ la valeur $|\lambda'| < \lambda_0$, ce qui est impossible d'après la définition de λ_0.

En résumé, *la limite inférieure précédemment définie λ_0 ou sa valeur symétrique $-\lambda_0$ est une racine de* D *et la plus petite en valeur absolue. La fonction harmonique correspondante u_0 est la solution du problème de minimum.*

IV. — Existence d'une infinité de fonctions harmoniques.

Nous procéderons par induction. Admettons l'existence de n fonctions $u_i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ qui, pour des valeurs de λ, égales en

valeur absolue aux nombres respectifs λ_i, sont solutions harmoniques de

$$\Delta u + \lambda A u = 0.$$

Nous supposons de plus que chaque fonction u_i est la solution du problème

$$J(u) = \text{minimum}$$

où u s'annule sur S et satisfait aux équations

$$|K(u)| = 1, \quad K'(u_j, u) \equiv \iint_{(\Omega)} A u_j u \, dx dy = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, i-1).$$

Pour démontrer l'existence d'une $(n+1)^{\text{ième}}$ fonction u_n de cette série, considérons le problème

$$J(u) = \text{minimum}$$

pour les fonctions u nulles sur S et telles que

$$|K(u)| = 1, \qquad K'(u_j, u) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Appelons λ_n la limite inférieure des valeurs prises par J sous ces conditions. Nous allons montrer que si $\lambda_n > \lambda_{n-1}$, $+\lambda_n$, ou $-\lambda_n$ est une nouvelle racine de D et que si $\lambda_n = \lambda_{n-1}$, il existe pour $\lambda = \lambda_n$ ou $\lambda = -\lambda_n$, une nouvelle fonction harmonique, solution de (1), linéairement indépendante des autres.

Choisissons une série de fonctions U_h satisfaisant aux conditions du nouveau problème de minimum et telles que

$$(2) \qquad \lim_{h=\infty} J(U_h) = \lambda_n;$$

$$(2)' \qquad K(U_h) = \pm 1,$$

le signe restant le même quel que soit h. Soit d'autre part

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots$$

une série infinie de fonctions satisfaisant aux conditions de continuité et s'annulant sur S.

Posons

$$\Delta U_h \pm \lambda_n A U_h = f_h$$
$$\Delta V_h \pm \lambda_n A V_h = g_h,$$

où les signes $\pm$ sont les mêmes que dans le second membre de (2)'.

On prouvera, comme dans le cas précédent, que

$$(5) \qquad \lim_{h=\infty} \iint_{(\Omega)} U_h g_h \, dx \, dy = 0,$$

pourvu que, en outre de la condition primitive

$$(6) \qquad \left| \iint_{(\Omega)} V_h g_h \, dx \, dy \right| < B,$$

les nouvelles conditions

$$(6)' \qquad K'(u_i, V_h) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

soient satisfaites.

En effet, il résulte de (6)' que les fonctions

$$v_h = U_h + c V_h,$$

où c est une constante, satisfont à toutes les conditions du nouveau problème de minimum, sauf $|K(v_h)| = 1$, car elles s'annulent sur S et l'on a

$$K'(u_i, v_h) = K'(u_i, U_h) + c K'(u_i, V_h) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

puisque les u_h satisfont aux conditions du problème de minimum et que V_h satisfait à (6)'.

Alors on peut appliquer les méthodes du cas précédent sans modification et il en résulte l'équation (5).

Considérons d'abord le cas où $\lambda_n > \lambda_{n-1}$. Si notre théorème n'était pas exact, $\pm \lambda_n$ ne serait pas racine de D. Alors il existerait (§ II),

pour chaque valeur de h, une solution de

$$(7) \qquad \Delta V_h \pm \lambda_n A V_h = A U_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

qui s'annulerait sur S.

De (7) et de

$$\Delta u_i \pm \lambda_i A u_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

il résulte (puisque u_i et V_h s'annulent sur S et que U_h satisfait aux conditions du problème de minimum) que l'on aura, quels que soient i et h,

$$\begin{aligned} &\pm (\lambda_n - \lambda_i) \iint_{(\Omega)} A u_i V_h \, dx\, dy \\ &\quad = \iint_{(\Omega)} (V_h \Delta u_i - u_i \Delta V_h) \, dx\, dy + \iint A U_h u_i \, dx\, dy \\ &\qquad\qquad = -\int_{(S)} \left(V_h \frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i \frac{\partial V_h}{\partial n} \right) ds = 0. \end{aligned}$$

Dès lors, puisque l'on a $\lambda_n > \lambda_i$, quel que soit $i < n$, les V_h satisfont aux conditions (6)'. On voit, comme dans le cas précédent, qu'elles satisferont aussi à (6). Par conséquent l'équation (5) est vérifiée ou

$$(8) \qquad \lim_{h=\infty} \iint_{(\Omega)} A U_h^2 \, dx, y = \lim_{h=\infty} K(U_h) = 0.$$

Mais ceci est impossible puisqu'on a, quel que soit h,

$$|K(U_h)| = 1.$$

Ainsi, $+\lambda_n$ ou $-\lambda_n$ est sûrement une racine de D pour $\lambda_n > \lambda_{n-1}$.

De plus, il en résulte qu'il y a une nouvelle solution harmonique u_n de (1) pour $\lambda = +\lambda_n$ ou pour $\lambda = -\lambda_n$; déterminons son facteur constant de façon que

$$|K(u_n)| = 1.$$

On déduira, comme précédemment, des équations

$$\left.\begin{aligned}\Delta u_i \pm \lambda_i \mathrm{A} u_i = 0\\ \Delta u_n \pm \lambda_n \mathrm{A} u_n = 0\end{aligned}\right\} \begin{aligned}(i = 0, 1, \ldots, n-1),\\ \lambda_n > \lambda_i,\end{aligned}$$

que u_h satisfait aux équations

$$\mathrm{K}'(u_j, u_n) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ainsi u_n satisfait aux conditions du problème de minimum et, puisqu'il donne à J la valeur λ_n, c'est la solution du problème. Notre théorème est complètement établi pour $\lambda_n > \lambda_{n-1}$. De plus, d'après la définition de λ_n, il ne peut y avoir de racines de D dont la valeur absolue soit comprise entre λ_{n-1} et λ_n.

Considérons maintenant le cas où l'on aurait

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_{n-r} \qquad (r \leqq n).$$

Il existera pour $\lambda = \lambda_n$ ou $\lambda = -\lambda_n$, une solution de (1), linéairement indépendante de $u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-r}$. Sinon, d'après (2), D et ses mineurs seraient nuls pour $\lambda = \lambda_n$ ou $\lambda = -\lambda_n$ jusqu'à l'ordre n exclusivement. Alors il existerait (III, § II), pour chaque valeur de h, une solution V_h de

$$(7) \qquad \Delta \mathrm{V}_h \pm \lambda_n \mathrm{A} \mathrm{V}_h = \mathrm{A} \mathrm{U}_h,$$

s'annulant sur S, car les fonctions $\mathrm{A}\mathrm{U}_h$ vérifient les conditions suffisantes

$$\iint_{(\Omega)} \mathrm{A}\mathrm{U}_h u_i \, dx \, dy = \mathrm{K}'(u_i, \mathrm{U}_h) = 0 \qquad (i = n-1, n-2, \ldots, n-r).$$

Ces solutions V_h ne sont pas déterminées d'une manière unique; elles ont la forme

$$\mathrm{V}_h = \mathrm{W}_h + \sum_{j=n-r}^{n-1} c_{hj} u_j,$$

où les c sont des constantes arbitraires.

Or on a, par hypothèse,

$$K(u_i) = 1, \qquad K'(u_i, u_j) = 0,$$

et, par conséquent, on peut déterminer les c de façon que

$$\iint_{(\Omega)} A u_i V_h \, dx\, dy = \iint_{(\Omega)} A u_i W_h \, dx\, dy \pm c_{hi} = 0$$
$$(i = n-1, \ldots, n-r).$$

Donc les fonctions V_h satisfont aux conditions (6)'.

Comme précédemment, elles vérifient (6) et, par suite, (5) et (8); d'où la contradiction annoncée. Il y a donc une solution u'_n de (1) qui est linéairement indépendante de $u_{n-1}, \ldots, u_{n-r}$. Considérons alors la fonction harmonique

$$u_n = \sum_{j=n-r}^{n-1} c_j u_j + c_n u'_n,$$

et déterminons les rapports des coefficients par les équations

$$K'(u_i, u_n) = \pm c_i + c_n K'(u_i, u'_n) = 0 \qquad (i = n-1, \ldots, n-r),$$

et leur facteur commun par la condition

$$|K(u_n)| = 1.$$

On verra, comme dans le cas $\lambda_n > \lambda_{n-1}$, que u_n vérifie les équations

$$K'(u_i, u_n) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-r-1),$$

puisque $\lambda_n > \lambda_{n-r-1}$. Ainsi u_n satisfait à toutes les conditions du problème de minimum et, puisqu'il donne la valeur λ_n à l'intégrale J, c'est la solution du problème.

En résumé, nous avons prouvé, en admettant l'existence de n fonctions harmoniques, l'existence d'une $(n+1)^{\text{ième}}$ et sa propriété de minimum. Il y a donc une série infinie de telles fonctions. Il faut observer qu'un nombre fini seulement de valeurs λ_i peuvent coïncider, car, pour toute valeur de λ, il n'y a qu'un nombre fini ou nul de mineurs de D

qui soient nuls [1]. De plus, puisque $+\lambda_i$ ou $-\lambda_i$ sont des zéros de la fonction transcendante entière D, il ne peut y avoir de limite supérieure pour les valeurs λ_i. En définitive, nous obtenons ce théorème :

Il existe une série infinie de valeurs numériques λ_i du paramètre λ et de fonctions harmoniques u_i nulles sur S *et solutions de l'équation*

$$\Delta u_i \pm \lambda_i A(x, y) u_i = 0.$$

La fonction u_i est solution du problème

$$J = \iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = minimum,$$

et elle donne la valeur λ_i à l'intégrale J. *Il n'y a pas de limite supérieure finie pour les nombres λ_i* [2].

V. — Extension aux conditions aux limites généralisées.

Les théorèmes sur l'existence des solutions de

$$\Delta u + \lambda A u = f,$$

qui satisfont, sur le contour S de Ω, à l'équation

$$u + \Sigma(s) \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma(s)$$

[où $\Sigma(s)$ et $\sigma(s)$ sont des fonctions continues données avec la condition $\Sigma(s) < 0$], peuvent être démontrés en remplaçant la fonction de Green employée (§ II) par la solution de Green de l'équation po-

---

(1) *Voir* note (1), p. 451.

(2) Si la fonction A change de signe dans Ω on peut remplacer la condition $|K| = 1$ soit par $K = 1$, soit par $K = -1$. Dans le premier cas on arrive à des valeurs positives λ_i; dans le second cas à des valeurs négatives. L'ensemble des valeurs λ_i se compose donc, si A change de signe, d'une infinité de valeurs positives et d'une infinité de valeurs négatives.

tentielle qui satisfait, sur le contour, à la condition

$$G + \Sigma(s)\frac{\partial G}{\partial n} = 0.$$

L'existence d'une telle fonction a été prouvée dans le cas

$$\Sigma(s) < 0.$$

Sans aucun changement de méthode, on démontrera des théorèmes analogues à ceux du premier cas, les équations du § II *s'appliquant sous la même forme aux conditions aux limites généralisées.*

Les fonctions harmoniques pour ce problème sont les solutions, autres que zéro, de l'équation

$$\Delta u + \lambda A u = 0$$

qui satisfont sur S à la condition

$$u + \Sigma\frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Il n'y a de telles solutions que si λ a pour valeur une racine de D, le déterminant D étant formé avec A et la fonction de Green généralisée.

Pour prouver l'existence d'une série infinie de fonctions harmoniques, on peut appliquer les méthodes des paragraphes 3, 4 avec une légère modification.

Considérons, pour cela, le problème de minimum

$$J(u) = \iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy - \int_{(S)} \frac{u^2}{\Sigma}\,ds = \text{minimum}$$

sous la condition

$$|K(u)| = 1, \qquad \text{avec} \qquad K(u) = \iint_{(\Omega)} A u^2\,dx\,dy.$$

Sous l'hypothèse $\Sigma < 0$, il existe une limite inférieure déterminée λ_0 des valeurs de J vérifiant la condition. On peut donc déter-

miner une série de fonctions

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots$$

telles que

$$K(U_h) = \pm 1$$

(le signe $\pm$ restant le même quel que soit h), et que

$$\lim_{h=\infty} J(U_h) = \lambda_0.$$

De plus, nous pouvons supposer sans restriction que ces fonctions U_h satisfont sur S à la condition

$$U_h + \Sigma \frac{\partial U_h}{\partial x} = 0.$$

Car cette condition, n'affectant les valeurs de ces fonctions que dans une bande aussi étroite que l'on veut enserrant le contour, ne peut altérer la limite inférieure de J.

Définissons une série de fonctions f_h par les équations

$$f_h = \Delta U_h \pm \lambda_0 A U_h$$

où le signe $\pm$ est le même que dans (2). Multiplions cette équation par U_h; en intégrant dans Ω, on aura

$$\lambda_0 - \iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial U_h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_h}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + \int_{(S)} U_h \frac{\partial U_h}{\partial n}\, ds = \iint_{(\Omega)} f_h U_h\, dx\,dy,$$

ou, d'après les conditions aux limites,

$$\lambda_0 - J(U_h) = \iint_{(\Omega)} f_h U_h\, dx\,dy.$$

L'hypothèse que $\pm \lambda_0$ n'est pas racine de D conduit à une contradiction comme dans le paragraphe III, les équations restant encore valables. Il n'y a qu'une différence, à savoir dans la démonstration que les fonctions V satisfont à la condition (6). Nous avions utilisé au paragraphe III le fait que les fonctions s'annulent sur le contour. Actuellement, nous trouvons encore que les fonctions vérifient (6)

pourvu que les valeurs des expressions

$$\left|\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy\right|$$

restent inférieures à une limite finie. Or

$$\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy = \int_{(S)} x\,U_h\,dy - \iint_{(\Omega)} x\,\frac{\partial U_h}{\partial x}\,dx\,dy.$$

Donc, si X est le maximum de $|x|$ sur le contour

$$\left|\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy\right| < X\int_{(S)} |U_h|\,dy + X\iint_{(\Omega)} \left|\frac{\partial U_h}{\partial x}\right| dx\,dy,$$

$$\left|\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy\right| < X\int_{(S)} (U_h^2 + 1)\,dy + X\iint_{(\Omega)} \left[1 + \left(\frac{\partial U_h}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy.$$

Dès lors, ces quantités restent inférieures à une limite finie, car on a

$$\lim_{h=\infty}\left\{\iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial U_h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_h}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy - \int_{(S)} \frac{U_h^2}{\Sigma}\,ds\right\} = \lambda_0, \qquad \Sigma < 0.$$

On prouvera, sans autre changement, le théorème analogue à celui du paragraphe IV :

Il existe une série infinie de valeurs λ_i telles que, pour l'une des valeurs $\lambda = \pm\lambda_i$, l'équation

$$\Delta u + \lambda A u = 0$$

possède une solution u_i différente de zéro et satisfaisant sur le contour à la condition

$$u + \Sigma\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \qquad \Sigma < 0,$$

La fonction u est la solution du problème

$$J(u) = \iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy - \int_{(S)} \frac{u^2}{\Sigma}\,ds = minimum$$

sous les conditions

$$\left|\iint_{(\Omega)} A u^2 dx\, dy\right| = 1; \qquad \iint_{(\Omega)} A u_j u\, dx\, dy = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, i-1).$$

Elle donne à l'expression J *la valeur* λ_i.

Il n'existe pas de limite supérieure finie pour les quantités λ_i (¹).

DEUXIÈME PARTIE.

LES SOLUTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

---

1. — Les solutions doublement périodiques de $\Delta u - u = f(x, y)$.

M. Picard (²) a démontré qu'il existe une fonction de la forme

$$\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) = \log\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + R(x, y, \xi, \eta)$$

[où R est continu ainsi que ses dérivées secondes dans un rectangle Ω de côtés a, b comprenant le point (ξ, η)] qui est doublement périodique avec les périodes a, b, et qui satisfait en tout point de Ω autre que (ξ, η) à l'équation

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} - \mathcal{G} = 0.$$

Nous pourrons appeler cette fonction la *fonction de Green doublement périodique* relative à l'équation

$$\Delta v - v = 0$$

pour les périodes a, b.

(¹) *Voir* la note (²), p. 472.

(²) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVIII, 1900, p. 186. *Voir* aussi *Comptes rendus*, 25 janvier 1904, où M. Picard a proposé la question traitée dans la présente Note.

Faisant usage du théorème de Green exactement comme dans le cas d'une fonction de Green ordinaire, nous obtenons la relation

$$\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) = \mathcal{G}(\xi, \eta, x, y).$$

Ainsi $\mathcal{G}$ est doublement périodique en ξ, η aussi bien qu'en x, y, fait qui ressort, du reste, de la forme donnée par M. Picard à la fonction. De plus, $\mathcal{G}$ satisfait en tout point de Ω autre que $\xi = x$, $\eta = y$ à l'équation

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \eta^2} - \mathcal{G} = 0.$$

Nous avons donc

$$\frac{\partial^2 \mathrm{R}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{R}}{\partial \eta^2} - \mathcal{G} = 0.$$

Considérons maintenant la fonction

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{(\Omega)} \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) f(x, y)\, dx\, dy;$$

elle est doublement périodique avec les périodes a, b, et puisque

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{(\Omega)} f(x, y) \log\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\, dx\, dy$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{(\Omega)} \mathrm{R}(x, y, \xi, \eta) f(x, y)\, dx\, dy,$$

nous déduisons de l'équation aux dérivées partielles de R :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f(\xi, \eta) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(\Omega)} \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) f(x, y)\, dx\, dy,$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - u = f(\xi, \eta).$$

2. — Théorèmes généraux sur l'existence des solutions doublement périodiques de $\Delta u + \lambda u A(x, y) = f(x, y)$.

Si $u(x, y)$ est une solution doublement périodique de

$$(1) \qquad \Delta u + \lambda A(x, y) u = f(x, y),$$

le théorème de Green nous conduira par des méthodes bien connues à la formule

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{(\Omega)} \{ f(x, y) - [1 + \lambda A(x, y)] u(x, y) \} \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) \, dx \, dy,$$

où $\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)$ est la fonction considérée dans le dernier paragraphe. Inversement, si u est une solution de cette équation fonctionnelle, le même paragraphe nous apprend que $u(x, y)$ est une solution doublement périodique de

$$\Delta u - u = f - (1 + \lambda A) u,$$

c'est-à-dire de l'équation (1). Par suite, les solutions doublement périodiques de (1) coïncident avec les solutions de l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = &-\frac{1}{2\pi} \iint_{(\Omega)} f(x, y) \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) \, dx \, dy \\ &- \frac{1}{2\pi} \iint_{(\Omega)} [1 + \lambda A(x, y)] u(x, y) \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

La forme de cette équation diffère de celle qui se présente dans le premier problème aux limites, par le remplacement de λA en $1 + \lambda A$; différence qui n'est d'ailleurs nullement essentielle.

Si $\mathfrak{D}$ est le déterminant de l'équation fonctionnelle (déterminant qui est une fonction transcendante de λ), nous arriverons exactement comme dans la première Partie de ce travail, aux théorèmes suivants :

I. *Si λ n'est pas une racine de* D, *il existe une solution double-*

ment périodique et une seule de

$$\Delta u + \lambda A u = f.$$

II. *Si λ a une valeur pour laquelle* D *et ses mineurs d'ordre inférieur à n s'annulent, le mineur d'ordre n restant différent de zéro, il existe n solutions doublement périodiques linéairement indépendantes :* Φ_ν *(et n seulement) de l'équation*

$$\Delta u + \lambda A = 0.$$

Pour chacune des valeurs de λ considérées dans le théorème II, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution doublement périodique de l'équation non homogène est, comme dans le cas du premier problème aux limites, que la fonction

$$F(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} f(x, y)\, \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)\, dx\, dy$$

satisfasse aux n équations

$$\iint_{\Omega} F(x, y)\, \Psi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans le cas du premier problème aux limites, nous avions l'expression

$$\Psi_\nu(x, y) = \text{const.}\ \lambda A(x, y)\, \Phi_\nu(x, y);$$

en remplaçant λA par $1 + \lambda A$, nous aurons, dans le cas présent,

$$\Psi_\nu(x, y) = \text{const.}\ [1 + \lambda A(x, y)]\, \Phi_\nu(x, y),$$

et les conditions précédentes deviennent

$$\iint_{\Omega} F(x, y)\, [1 + \lambda A(x, y)]\, \Phi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0$$

ou

$$\iint F \Phi_\nu\, dx\, dy - \iint F\, \Delta\Phi_\nu\, dx\, dy = 0$$

lorsque $\lambda \neq 0$, puisque

$$\Delta\Phi_\nu + \lambda A \Phi_\nu = 0.$$

D'après le n° **1**, F est une solution doublement périodique de

$$\Delta F - F = f.$$

Nous aurons donc, en appliquant le théorème de Green, et puisque F et Φ_ν sont doublement périodiques :

$$\iint_\Omega [F \Delta\Phi_\nu - \Phi_\nu(f + F)]\, dx\, dy = \int \left(F \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial n} - \Phi_\nu \frac{\partial F}{\partial n}\right) ds = 0.$$

Dès lors, les conditions précédentes prennent la forme

$$\iint_{(\Omega)} F \Phi_\nu\, dx\, dy - \iint_{(\Omega)} \Phi_\nu (f + F)\, dx\, dy = 0$$

ou

$$\iint_{(\Omega)} f(x, y)\, \Phi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire

$$\Delta u = 0,$$

il existe la solution $\Phi_1 =$ const., mais, comme on le sait, il n'y a aucune solution continue doublement périodique. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution doublement périodique de

$$\Delta u = f$$

prend la forme

$$\iint_{(\Omega)} F\, dx\, dy = 0.$$

Or

$$\Delta F - F = f,$$

et, puisque F est doublement périodique, nous tirons du théorème de

Green

$$\iint_{(\Omega)} \Delta F \, dx \, dy = \int \frac{\partial F}{\partial n} \, ds = 0.$$

La condition devient donc

$$\iint_{(\Omega)} f \, dx \, dy = 0$$

ou, puisque Φ_1 est constant,

$$\iint_{(\Omega)} f \Phi_1 \, dx \, dy = 0.$$

Nous arrivons donc, dans tous les cas, au théorème suivant :

III. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution doublement périodique de*

$$\Delta u + \lambda A u = f,$$

lorsque λ *a l'une des valeurs considérées au théorème II est que* f *satisfasse aux* n *équations*

$$\iint_{(\Omega)} f \Phi_\nu \, dx \, dy = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où les Φ_ν *sont les solutions linéairement indépendantes de*

$$\Delta u + \lambda A u = 0,$$

pour cette même valeur de λ.

3. — Existence d'une suite infinie de solutions doublement périodiques de $\Delta u + \lambda A u = 0$.

Lorsque $\lambda = 0$, il existe la solution doublement périodique $u_0 = 0$. Nous procéderons par induction pour prouver l'existence d'une suite

indéfinie de solutions doublement périodiques. Admettons l'existence de n telles solutions $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, pour les valeurs $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ de λ. Déterminons les facteurs constants arbitraires de ces solutions de telle façon que

$$|K(u_i)| = 1 \qquad \text{où} \qquad K(u_i) = \iint_{(\Omega)} A u_i^2 \, dx \, dy,$$

ce qui est possible, sauf quand $K(u_i)$ est nul. On a dans ce cas, en multipliant

$$\Delta u_i + \lambda_i A u_i = 0$$

par u_i, intégrant dans Ω et appliquant le théorème de Green :

$$\iint_{(\Omega)} u_i \Delta u_i \, dx \, dy = -\iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2\right] dx \, dy = 0.$$

Par suite,

$$u_i = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \lambda_i = \lambda_0 = 0.$$

Nous pouvons donc supposer que toutes nos solutions, sauf peut-être u_0, satisfont à la condition précédente.

Ajoutons les équations

$$u_i(\Delta u_j + \lambda_j A u_j) = 0,$$
$$-u_j(\Delta u_i + \lambda_i A u_i) = 0;$$

intégrons dans Ω et appliquons le théorème de Green; nous aurons

$$(\lambda_j - \lambda_i) \iint_{(\Omega)} A u_j u_i \, dx \, dy = 0,$$

et, par suite, si $\lambda_j \neq \lambda_i$:

$$K'(u_i, u_j) \equiv \iint_{(\Omega)} A u_i u_j \, dx \, dy = 0.$$

Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$ les solutions qui correspondent à un certain nombre de valeurs égales du paramètre.

Nous pourrons prendre, à la place de Φ_2, la fonction

$$\Phi'_2 = c_{12}\Phi_1 + \Phi_2,$$

la constante c_{12} étant choisie de telle sorte que

$$K'(\Phi_1, \Phi'_2) = \pm c_{12} + K'(\Phi_1, \Phi_2) = 0.$$

A la place de Φ_3, nous pourrons prendre

$$\Phi'_3 = c_{13}\Phi_1 + c_{23}\Phi'_2 + \Phi_3,$$

les constantes étant choisies de façon que

$$K'(\Phi_1, \Phi'_3) = \pm c_{13} + K'(\Phi_1, \Phi_3) = 0,$$
$$K'(\Phi'_2, \Phi'_3) = \pm c_{23} + K'(\Phi_2, \Phi_3) = 0,$$

et ainsi de suite.

En définitive, nous pouvons supposer que les fonctions u_i satisfont, non seulement aux équations

$$|K(u_i)| = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

mais encore à

$$K'(u_i, u_j) = 0 \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ i \neq j).$$

Considérons maintenant le problème de minimum suivant. Il s'agit de rendre minimum l'intégrale

$$J(u) = \iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy,$$

lorsque u possède des dérivées secondes continues par rapport à x et y en tout point du rectangle Ω et satisfait aux équations

$$|K(u)| = 1 \qquad \text{où} \qquad K(u) = \iint_{(\Omega)} A u^2\,dx\,dy,$$

$$K'(u_j, u) = \iint_{(\Omega)} A u_j u\,dx\,dy = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$u(\bar{x}, y) = u(\bar{x} + a, y) \qquad (\bar{y} \leqq y \leqq \bar{y} + b),$$
$$u(x, \bar{y}) = u(x, \bar{y} + b) \qquad (\bar{x} \leqq x \leqq \bar{x} + a);$$

où u_j sont les solutions de l'équation aux dérivées partielles (solutions dont nous avons admis l'existence) et où les côtés du rectangle Ω sont désignés par

$$x = \bar{x}, \qquad x = \bar{x} + a; \qquad y = \bar{y}, \qquad y = \bar{y} + b.$$

Désignons par $|\lambda_n|$ la limite inférieure des valeurs de J sous ces conditions. Nous allons prouver qu'il existe, soit pour $\lambda = |\lambda_n|$, soit pour $\lambda = -|\lambda_n|$, une solution doublement périodique u_n de l'équation

$$(1) \qquad \Delta u + \lambda A u = 0,$$

u_n étant linéairement indépendant de $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$.

D'après la définition de λ_n, il existe une suite indéfinie de fonctions $U_1, U_2, U_3, \ldots$ satisfaisant aux conditions du problème de minimum et telles que

$$(2) \qquad \lim_{h=\infty} J(U_h) = |\lambda_n|.$$

Nous pouvons même supposer sans restriction que ces fonctions vérifient les conditions

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\bar{x}} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\bar{x}+a} \qquad (\bar{y} \leqq y \leqq \bar{y} + b),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\bar{y}} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\bar{y}+b} \qquad (\bar{x} \leqq x \leqq x + a),$$

et que

$$K(u) = \pm 1,$$

avec le même signe quel que soit h.

Or on a, soit $|\lambda_n| > |\lambda_{n-1}|$, soit

$$|\lambda_n| = |\lambda_{n-1}| = \ldots = |\lambda_{n-r}|.$$

Dans ce dernier cas, $|\lambda_{n-r}| > 0$, car $u_0 = \text{const.}$ est la seule solution doublement périodique de $\Delta u = 0$. Dans les deux cas, le raisonnement employé dans le premier problème aux limites prouvera encore ici l'existence d'une solution u_n du genre annoncé pourvu que les

quantités

$$\left|\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy\right|$$

restent inférieures, quel que soit h, à une limite fixe

$$(3)\qquad \left|\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy\right| \leqq B \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nous considérerons deux cas; supposons d'abord

$$\iint_{(\Omega)} A\,dx\,dy = 0.$$

Alors on peut remplacer les fonctions U_h par $U_h + C_h$, où les C_h sont des constantes arbitraires, car

$$K(U_h + C_h) = K(U_h) + 2C_h \iint_{(\Omega)} A\,U_h\,dx\,dy$$
$$+ C_h^2 \iint_{(\Omega)} A\,dx\,dy = K(U_h) = \pm 1$$

et

$$K'(u_j, U_h + C_h) = K'(u_j, U_h) + C_h \iint_{(\Omega)} A\,u_j\,dx\,dy = K'(u_j, U_h) = 0,$$

puisqu'on a

$$\iint_{(\Omega)} A\,u_j\,u_0\,dx\,dy = 0, \qquad u_0 = \text{const.}$$

Enfin

$$J(U_h + C_h) = J(U_h).$$

Les constantes C_h peuvent être choisies de façon que

$$\iint_{(\Omega)} (U_h + C_h)\,dx\,dy = 0,$$

et ces fonctions $U_h + C_h$ vérifient les conditions (3).

Il reste le cas où

$$\iint_{(\Omega)} A\,dx\,dy \neq 0.$$

Si l'on a

$$\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy = 0,$$

les conditions (3) sont satisfaites; sinon, en posant

$$W_h = \frac{U_h}{\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy},$$

nous aurons

$$\lim_{h=\infty} J(W_h) = \frac{|\lambda_n|}{\left[\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy\right]^2},$$

$$\iint_{(\Omega)} W_h\,dx\,dy = 1, \qquad \iint_{(\Omega)} AW_h\,dx\,dy = 0.$$

En résumé, nous pourrons choisir une suite infinie de fonctions prises, soit parmi les U_h et satisfaisant à (3), soit parmi les W_h et telles que

$$\lim_{h=\infty} J(W_h) = 0.$$

La dernière hypothèse est impossible, puisque les équations

$$\iint_{(\Omega)} A\,dx\,dy \neq 0,$$

$$\iint_{(\Omega)} W_h\,dx\,dy = 1,$$

$$\iint_{(\Omega)} AW_h\,dx\,dy = 0,$$

$$\lim_{h=\infty} \iint \left[\left(\frac{\partial W_h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_h}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = 0,$$

$$W_h(\bar{x}, y) = W_h(\bar{x} + a, y) \qquad (\bar{y} \leq y \leq \bar{y} + b),$$

$$W_h(x, \bar{y}) = W_h(x, \bar{y} + b) \qquad (\bar{x} \leq x \leq \bar{x} + b),$$

sont incompatibles. Car, autrement, nous aurions, quels que soient x, y, x', y' dans Ω,

$$\lim_{h=\infty}\int_x^{x'}\int_y^{y'}\left(\frac{\partial W_h}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = 0, \qquad \lim_{h=\infty}\int_x^{x'}\int_y^{y'}\left(\frac{\partial W_h}{\partial y}\right)^2 dx\,dy = 0.$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz, on a, pour deux fonctions arbitraires φ, ψ,

$$\left[\int_x^{x'}\int_y^{y'}\varphi\psi\,dx\,dy\right]^2 \leqq \int_x^{x'}\int_y^{y'}\varphi^2\,dx\,dy \times \int_x^{x'}\int_y^{y'}\psi^2\,dx\,dy,$$

et, par suite,

$$\left[\int_x^{x'}\int_y^{y'}\frac{\partial W_h}{\partial x}\,dx\,dy\right]^2 \leqq \omega\int_x^{x'}\int_y^{y'}\left(\frac{\partial W_h}{\partial x}\right)^2 dx\,dy,$$

$$\left[\int_x^{x'}\int_y^{y'}\frac{\partial W_h}{\partial y}\,dx\,dy\right]^2 \leqq \omega\int_x^{x'}\int_y^{y'}\left(\frac{\partial W_h}{\partial y}\right)^2 dx\,dy,$$

où ω est l'aire de Ω. On a donc

$$\lim_{h=\infty}\int_x^{x'}\int_y^{y'}\frac{\partial W_h}{dx}\,dx\,dy = \lim_{h=\infty}\int_y^{y'}[W_h(x',y)-W_h(x,y)]\,dy = 0,$$

$$(4)\quad \lim_{h=\infty}\int_x^{x'}\int_y^{y'}\frac{\partial W_h}{\partial y}\,dx\,dy = \lim_{h=\infty}\int_x^{x'}[W_h(x,y')-W_h(x,y)]\,dy = 0.$$

Comme ces équations sont vérifiées, quels que soient x, y, x', y dans Ω, nous aurons

$$\lim_{h=\infty}\iint_{(\Omega)} A(x,y)\,[W_h(x',y)-W_h(x,y)]\,dx\,dy = 0,$$

ou, puisque

$$\iint_{(\Omega)} A(x,y)\,W_h(x,y)\,dx\,dy = 0,$$

$$\lim_{h=\infty}\iint_{(\Omega)} A(x,y)\,W_h(x',y)\,dx\,dy$$

$$= \lim_{h=\infty}\int_{\bar{y}}^{\bar{y}+b}\left[W_h(x',y)\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+a} A(x,y)\,dx\right]dy = 0.$$

Intégrons par parties, nous aurons

$$\lim_{h=\infty}\left\{W_h(x', \bar{y}+b)\iint_{(\Omega)} A\,dx\,dy\right.$$
$$\left.-\int_{\bar{y}}^{\bar{y}+b}\left[\frac{\partial W_h(x', y)}{\partial y}\int_{\bar{y}}^{y}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+a} A\,dx\,dy\right]dy\right\}=0.$$

Mais la limite du second terme est zéro et, par suite, puisqu'on suppose

$$\iint_{(\Omega)} A\,dx\,dy \neq 0,$$

nous aurons

$$\lim_{h=\infty} W_h(x', \bar{y}+b)=0.$$

D'autre part, l'équation (4) a lieu quels que soient (x, y), (x', y') dans Ω; en particulier, pour $y'=\bar{y}+b$, nous aurons

$$\lim_{h=\infty}\int_{x}^{x'}\left[W_h(x, \bar{y}+b)-W_h(x, y)\right]dx$$
$$=-\lim_{h=\infty}\int_{x}^{x'} W_h(x, y)\,dx=0,$$

d'où

$$\lim_{h=\infty}\iint_{(\Omega)} W_h\,dx\,dy=0.$$

Or, on a

$$\iint_{(\Omega)} W_h\,dx\,dy=1,$$

quel que soit h; il est donc impossible de supposer qu'il existe parmi les U_h une série infinie de fonctions ne satisfaisant pas à la condition (3).

Cette condition étant vérifiée par toutes les fonctions U_h, exception faite de certaines en nombre fini ou nul, la démonstration se déroulera exactement comme dans le cas de la première condition aux limites.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Il existe une série infinie de valeurs λ_i du paramètre λ et de fonctions u_i partout finies, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, doublement périodiques avec les périodes a, b et satisfaisant à l'équation

$$\Delta u_i + \lambda_i A(x, y) u_i = 0,$$

où A *possède les périodes a, b.*

La fonction $u_i (i \neq 0)$ est solution du problème

$$J = \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+b} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+a} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy = minimum,$$

sous les conditions

$$u(\bar{x}, y) = u(\bar{x} + a, y) \qquad (\bar{y} \leqq y \leqq \bar{y} + b),$$

$$u(x, \bar{y}) = u(x, \bar{y} + b) \qquad (\bar{x} \leqq x \leqq \bar{x} + a),$$

$$\left| \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+b} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+a} A u^2\, dx\, dy \right| = 1, \qquad \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+b} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+a} A u u_j\, dx\, dy = 0$$

$$(j = 0, 1, \ldots, i - 1),$$

et elle donne à l'intégrale J *la valeur $|\lambda_i|$.*

Il y a au plus un nombre fini de valeurs λ_i qui coïncident et $|\lambda_i|$ croît au delà de toute limite (¹).

(¹) Si A change de signe, l'ensemble des valeurs λ_i se compose d'une infinité de valeurs positives et d'une infinité de valeurs négatives. *Voir* la note (²), p. 472.

TABLE DES MATIÈRES.

CINQUIÈME SÉRIE. — TOME X.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889 (*Note de la Rédaction.*)

Pages.

[S2] Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources; par M. *J. Boussinesq* 5

[S2] Rationalité d'une loi expérimentale de M. Parenty pour l'écoulement des gaz par les orifices; par M. *J. Boussinesq* 79

[H,J4g] Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la théorie des groupes continus; par M. *A. Buhl,* maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier 85

[H9] Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique à 3 ou 4 variables indépendantes; par M. *R. d'Adhémar* 131

[G3] Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques; par M. *G. Humbert* 209

[I24c] Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants; par M. *Edmond Maillet* 275

[S2] Complément au Mémoire intitulé : « Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources »; par M. *J. Boussinesq* 363

Pages.

[H9] Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes; par M. *S. Zaremba,* professeur à l'Université de Cracovie 395

[H9] Sur les solutions satisfaisant à des conditions aux limites données de l'équation différentielle $\Delta u + \lambda A(x, y) u = f(x, y)$; par M. *Max Mason* 445

FIN DU TOME X DE LA CINQUIÈME SÉRIE.

34170 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
1
J684
sér.5
t.10
~~Physical & Applied Sci. Serials~~
Math

Journal de mathématiques pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY